Chapitre 8

Fonction logarithme népérien

Les objectifs du chapitre

La fonction logarithme népérien est introduite comme fonction réciproque de la fonction exponentielle étudiée en classe de première. Les élèves s'appuient sur les images mentales des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme.

Contenu

- Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle
- Propriétés algébriques du logarithme
- Fonction dérivée du logarithme, variations
- Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle
- Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$

Capacités attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme

Démonstrations

- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise
- Limite en 0 de $x \mapsto \ln(x)$

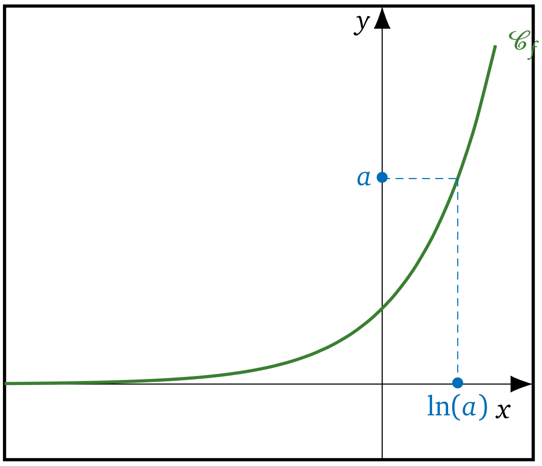
Approfondissements possibles

- Pour α dans $\mathbb{R}$, fonction $x \mapsto x^\alpha$
- Pour x dans $\mathbb{R}$, limite de $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$

I Le cours

1. Définition et premières propriétés

Soit a un nombre réel **strictement positif**. Montrons que l'équation $e^x = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Notons f la fonction exponentielle.
f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Autrement dit, pour tout $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



Définition 1 : logarithme népérien

Soit a un réel strictement positif.
On appelle **logarithme népérien** de a, l'unique solution réelle de l'équation $e^x = a$.

$$\boxed{e^x = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln(a)}$$

La fonction logarithme népérien, notée ln et définie sur $]0 ; +\infty[$, est la réciproque de la fonction exponentielle.

Exemples

- D'une part $e^x = 1 = e^0 \iff x = 0$. D'autre part $e^x = 1 \iff x = \ln(1)$. Ainsi $\ln(1) = 0$
- D"aune part $e^x = e = e^1 \iff x = 1$. D'autre part $e^x = e \iff x = \ln(e)$. Ainsi $\ln(e) = 1$

Propriété 1 : conséquences

❶ $\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ e^{\ln(x)} = x}$

❷ $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x\right) = x}$

Démonstration

❶ Soit x un nombre réel strictement positif.
Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre, il s'ensuit que $e^{\ln(x)} = x$.

❷ Soit x un nombre réel.
On sait que $e^x > 0$, donc d'après le point précédent

$$\exp\left(\ln\left(e^x\right)\right) = \exp(x).$$

Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $\ln\left(e^x\right) = x$.

2. Étude de la fonction ln

Propriété 2 : dérivée de la fonction ln

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x>0, \qquad \ln'(x)=\frac{1}{x}}$$

Ainsi, la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration (exigible)

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
Notons f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\ln(x)}-x$.
f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Par ailleurs, pour tout $x>0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)}=x$. Ainsi la fonction f est la fonction nulle.
Donc, pour tout $x>0$, $f'(x)=0$. Or, pour tout $x>0$,

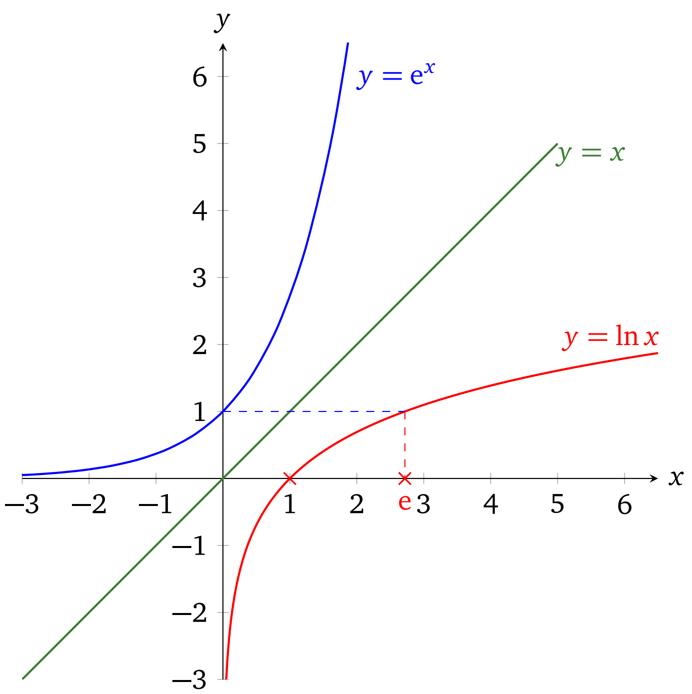
$$f'(x)=\ln'(x)\times\mathrm{e}^{\ln(x)}-1.$$

Donc, pour tout $x>0$, $\ln'(x)\times x-1=0$, ou encore $\ln'(x)\times x=1$.
Ce qui permet de conclure.

Tableau de variations de ln

x	0	$+\infty$
Variations de ln	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Propriétés graphiques



3. Propriétés algébriques

Le logarithme est une machine qui transforme un produit (strictement positif) en une somme.

Propriété 3 : propriétés algébriques de la fonction ln

Pour tous $a > 0$, $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

Méthode 1 : utilisation des propriétés algébriques de la fonction ln

Montrer que $\ln\left(\sqrt{3}-1\right) + \ln\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln 2$.

Corrigé

Posons $a = \sqrt{3} - 1$ et $b = \sqrt{3} + 10$.
Les réels a et b étant strictement positifs, on peut écrire $\ln a + \ln b = \ln(ab)$.
Or, par identité remarquable, $ab = \sqrt{3}^2 - 1^2 = 2$, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\ln\left(\sqrt{3}-1\right) + \ln\left(\sqrt{3}+1\right) = \ln 2.}$$

Michael Stifel

Michael Stifel (1487 - 1567) est un moine et mathématicien allemand. Il est connu pour avoir popularisé les symboles $+$, $-$ et $\sqrt{\ }$. Il travaille avec des nombres négatifs qu'il appelle "*nombres absurdes*".
Un jour, le moine annonce la fin du monde pour le 3 octobre 1533 et qu'un chariot céleste l'emportera en compagnie de ses paroissiens au paradis. Cette prédiction n'ayant pas eu lieu, Stifel fut lynché, incarcéré un temps, puis libéré et sauvé par Luther.
Une fois libre, Stifel se consacre exclusivement aux mathématiques et rédige en 1544 son célèbre livre *Arithemetica integra* dans lequel il montre l'intérêt de mettre en parallèle une suite arithmétique et une suite géométrique, prélude à l'invention des logarithmes.
Le tableau ci-dessous est extrait de ce livre :

Ligne 1	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
Ligne 2	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	$\cdots$

On voit bien que passer de la ligne 2 à la ligne 1 permet de transformer des produits en sommes.
Par exemple, au lieu de multiplier 8 par 32 dans la ligne 2, on prend les "logarithmes" 3 et 5 dans la ligne 1, on les additionne (pour obtenir 8) et on lit le nombre correspondant dans la ligne 2, ce qui donne $8 \times 32 = 256$!

4. Équations et inéquations

Propriété 4 :

Pour tous $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y \qquad \text{et} \qquad \ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y.$$

Méthode 2 : résolution d'une équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(3x-2) = 2$.

Corrigé

L'équation de départ est bien définie, si et seulement si, $3x - 2 > 0$.

Pour $x \in \mathscr{D} = \left]\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$, on a

$$\begin{aligned} \ln(3x-2) = 2 &\Leftrightarrow e^{\ln(3x-2)} = e^2 && \left(a = b \Leftrightarrow e^a = e^b\right) \\ &\Leftrightarrow 3x - 2 = e^2 && \left(e^{\ln y} = y,\ \text{pour tout } y > 0\right) \end{aligned}$$

Ainsi $x = \dfrac{2+e^2}{3}$ qui appartient bien à $\mathscr{D}$. Par conséquent $S = \left\{\dfrac{2+e^2}{3}\right\}$.

5. Signe du logarithme népérien

Propriété 5 : signe de la fonction ln

- Pour tout $0 < x < 1$, $\ln x < 0$
- Pour tout $x > 1$, $\ln x > 0$

Méthode 3 : résolution d'une inéquation

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n > 10^{-3}$.

Corrigé

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5}\right)^n > 10^{-3} &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{5}\right)^n > \ln 10^{-3} && (\ln \text{ est strictement croissante sur }]0\ ;\ +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln\frac{1}{5} > \ln 10^{-3} \Leftrightarrow n < \frac{\ln 10^{-3}}{\ln\frac{1}{5}} && \left(\ln\frac{1}{5} < 0 \text{ car } \frac{1}{5} < 1\right) \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln 10^{-3}}{\ln\frac{1}{5}} \approx 2,86$, ainsi $n = 0$ ou $n = 1$ ou $n = 2$.

6. Limites usuelles

Propriété 6 : limites usuelles

- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Remarque : La dernière limite provient de la définition de la dérivée de la fonction ln en 1.
En effet, en notant $f : x \mapsto \ln x$, f est dérivable en 1 et on a

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

Or la dérivée de f en 1 vaut $\frac{1}{1} = 1$, ce qui donne $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Méthode 4 : détermination d'une limite

Montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{7x^3} = +\infty$.

Corrigé

La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{7x^3}$ est bien définie pour $x \in \mathscr{D} =]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathscr{D}$ $\frac{\ln(1+x)}{7x^3} = \frac{1}{7x^2} \times \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Or, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{7x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Par produit, on obtient que $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{7x^3} = +\infty$.

7. Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$

Propriété 7 : dérivée de $\ln(u)$

Soit u une fonction **strictement positive** et dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Méthode 5 : détermination de la dérivée d'une fonction

Déterminer une expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(5x^2 + 7\right)$.

Corrigé

La fonction f est de la forme $\ln(u)$ où u est la fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ définie par $u(x) = 5x^2 + 7$. Comme $u'(x) = 10x$, on conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{10x}{5x^2+7}$.

8. Croissances comparées

Propriété 8 : croissances comparées (voir l'exercice 19)

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Méthode 6 : utilisation des croissances comparées

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x)}{x^2(1+x^2)}$.

Corrigé

Pour $x > 0$, on a $\frac{2\ln(x)}{x^2(1+x^2)} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{2}{x(1+x^2)}$.

Or, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et par opérations sur les limites $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} = 0$.

On conclut par produit des limites que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x)}{x^2(1+x^2)} = 0.}$

II Les exercices

1. La fonction exponentielle

Exercice 1 Simplifier une expression

Écrire les expressions suivantes sous la forme e^a où $a \in \mathbb{R}$.

1. $A = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-4}$ **2.** $B = \dfrac{\mathrm{e}^{-7}}{\mathrm{e}^{-12}}$ **3.** $C = \dfrac{\mathrm{e}^2 \times \left(\mathrm{e}^4\right)^2}{\mathrm{e}}$

Exercice 2 Développer une expression

Développer puis simplifier les expressions suivantes.

1. $A(x) = (3\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 1)$ **2.** $B(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x\right)$ **3.** $C(x) = (\mathrm{e}^{3x} - 2)^2$

Exercice 3 Factoriser une expression

Factoriser les expressions suivantes.

1. $A(x) = 5\mathrm{e}^x + 10x\mathrm{e}^x$ **3.** $C(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x$ **5.** $E(x) = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x + \dfrac{3}{2}$

2. $B(x) = 3x\mathrm{e}^{-x} - 6\mathrm{e}^{-x}$ **4.** $D(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1$ **6.** $F(x) = \mathrm{e}^{8x} - 49$

Exercice 4 Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x-1}$ **3.** $\mathrm{e}^{x-2} = 1$ **5.** $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 2 = 0$

2. $\mathrm{e}^{x+3} = 0$ **4.** $\mathrm{e}^{1+x+\frac{x^2}{2}} = \mathrm{e}$ **6.** $2\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$

Exercice 5 Résolution d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\mathrm{e}^x > 0$ **3.** $\mathrm{e}^{5x-1} \leq 1$ **5.** $\mathrm{e}^{x^2-5x+6} \geq 1$

2. $-\mathrm{e}^{3x} > 0$ **4.** $7\mathrm{e}^x + 1 > 0$ **6.** $\mathrm{e}^{x^2} > 1$

Exercice 6 Signe d'une expression

Donner le signe de chacune des expressions suivantes.

1. $A(x) = x\mathrm{e}^x$ **2.** $B(x) = (x-3)\mathrm{e}^{-x}$ **3.** $C(x) = (x^2 + x - 6)\mathrm{e}^{x^2+x-6}$

Exercice 7 Étude de variations sans dériver

Donner dans chacun des cas suivants, **sans calculer la fonction dérivée**, le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ **2.** $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{-3}{2}x}$ **3.** $f(x) = -5\mathrm{e}^{-2x}$

Exercice 8 — Dérivation de fonctions

Dans chacun des cas qui suivent, donner une expression de la dérivée de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = e^{3x+5}$
2. $f(x) = xe^x$
3. $f(x) = x(e^{2x} + 1)$
4. $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$
5. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^4 + 1}$
6. $f(x) = 5(x^2 - 1)e^{-3x+2}$

2. Propriétés algébriques de la fonction ln

Exercice 9 — Vrai ou faux ?

1. Pour tout $x > 0$, $\ln x \geq 0$.
2. $\ln(5+7) = \ln 5 \times \ln 7$.
3. La fonction logarithme népérien est concave sur son ensemble de définition.
4. La tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1 admet pour équation réduite $y = x - 1$.
5. Les fonctions $f : x \mapsto \ln(x^2)$ et $g : x \mapsto 2\ln x$ sont égales.
6. L'équation $\ln x = -3$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 10 — Propriétés algébriques du logarithme népérien

Écrire les expressions suivantes sous la forme de $x\ln(3)$ où x est un nombre réel.

1. $A = \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$
2. $B = \ln\left(3\sqrt{3}\right)$
3. $C = \ln(15) - \ln(45)$
4. $D = \dfrac{\ln 9}{2} + \ln\sqrt{3}$

Exercice 11 — Simplification d'expressions

x désigne un nombre réel strictement positif.
Simplifier le plus possible chacune des expressions suivantes.

1. $A(x) = \ln(x^2) + \ln x$
2. $B(x) = \ln(\sqrt{x}) - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $C(x) = \ln\left(\dfrac{x}{e}\right) + \ln(\sqrt{ex})$
4. $D(x) = \ln\left(\dfrac{e^2}{2x}\right)$
5. $E(x) = e^{\ln x + x}$
6. $F(x) = \ln(x^2 e^x)$

Exercice 12 — Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^{4x+3} = 2$
2. $\ln(x+1) = 8$
3. $\ln\left(x^2 + x - 5\right) = 0$
4. $(\ln x)^2 + 1 = -\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
5. $x^2 - 2x = \ln\left(\dfrac{e^{-4+5x}}{e^{5x-3}}\right)$
6. $\ln\left(1 - x^2\right) = \left(1 + x^2\right)e^{-\pi x^2}$

Exercice 13 — Résolution d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les inéquations suivantes.

1. $3^n > 8$
2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \geq \dfrac{1}{7}$

Exercice 14 Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

2. $g(x) = \ln(\ln(x-1))$

3. $h(x) = \ln\left(\frac{e^{\pi x}}{x^2+1}\right)$

4. $k(x) = \frac{1}{1-\ln x}$

Exercice 15 Calcul de limites

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3\ln x - 5x^2)$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x)}{x^7}e^x$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\sqrt{x}) - \frac{3}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + x + \ln x)$

Exercice 16 Dérivation de fonctions

Donner une expression de la dérivée de f dans chacun des cas suivants

1. $f_1 : \begin{array}{rcl}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\sqrt{x}\right) \end{array}$

2. $f_2 : \begin{array}{rcl}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$

3. $f_3 : \begin{array}{rcl}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{e}{\sqrt{x}}\right) \end{array}$

4. $f_4 : \begin{array}{rcl}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x\ln x} \end{array}$

5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(5x^2+1\right) \end{array}$

6. $f_6 : \begin{array}{rcl}]1\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right) \end{array}$

7. $f_7 : \begin{array}{rcl}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln x \end{array}$

8. $f_8 : \begin{array}{rcl}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\ln x + x} \end{array}$

9. $f_9 : \begin{array}{rcl}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{e^3}{2x}\right) \end{array}$

Exercice 17 Nombre d'itérations dans un programme

On considère le programme incomplet ci-contre. Son rôle est de déterminer le seul entier positif k tel que

$2^k \leq n < 2^{k+1}$ pour n donné dans $\mathbb{N}^*$.

1. Compléter ce programme.

2. Donner un encadrement du nombre d'itérations.

3. Que renvoie le programme pour $n = 50$?

```
n= int( input("n="))
k=0
while  .......... :
    k=k+1
print(k)
```

Exercice 18 Inégalités remarquables

1. On considère la fonction f définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

(a) Montrer que f est croissante sur I.

(b) En déduire que pour tout $x \geq 0$

$$\ln(1+x) \leq x.$$

2. On pose $g(x) = \ln x$.
Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

(a) Montrer que g est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

(c) Quelle inégalité peut-on obtenir ?

Exercice 19 Démonstration

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.

2. En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ (les limites aux bornes ne sont pas demandées).

3. Justifier alors que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $\ln x < \sqrt{x}$.

Partie B : utilisation des théorèmes de comparaisons

1. Démontrer que, pour tout réel $x > 1$, on a $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Exercice 20 Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathscr{D}_f$ par $f(x) = x \ln x$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$.

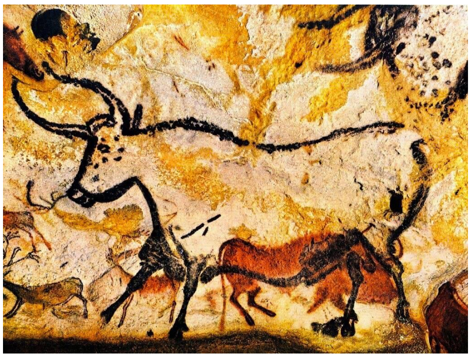
2. Donner une expression de la dérivée f' de f.

3. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$ puis étudier les variations f.

4. Montrer que f est convexe sur $\mathscr{D}_f$.

Exercice 21 Datation par le carbone 14

La technique de "datation par le carbone 14" permet, en mesurant la radioactivité naturelle de certains échantillons, d'en donner l'âge.
Par exemple, les peintures des grottes de Lascaux en France ont pu être datées à 13 500 ans avant Jésus Christ.



- Soit u_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.
- Soit u_n le nombre d'atomes de carbone 14 après n siècles, $n \in \mathbb{N}$.

Le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique puis exprimer u_n en fonction de n.

2. Un squelette d'homme préhistorique contient 3 % du carbone 14 initial. Donner une estimation de son âge.

Exercice 22 Utilisation d'une fonction auxiliaire

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - 1 - \ln x$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

2. Donner le signe de $g'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. En déduire le tableau de variations de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ pour le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

4. Que peut-on dire du signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 1 - 2x\ln x$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. On admet que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Donner une expression de $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. En déduire le tableau de variations de f.

5. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe de f.

3. Sujets de Bac

Exercice 23 Bac 2005

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3x - 2 - 2x\ln x.$$

1. On donne ci-dessous le tableau de variations de f. Recopier ce tableau sur la copie.

(a) Justifier le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $\left]0\,;\,\sqrt{e}\right[$ et $\left]\sqrt{e}\,;\,+\infty\right[$.

(b) Calculer la valeur exacte de $f\left(\sqrt{e}\right)$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ -2	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{e}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

2. À l'aide de ce tableau de variations, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Si ces solutions existent, donner pour chacune d'elles la valeur décimale approchée arrondie au dixième (aucune justification n'est demandée).

3. Indiquer, en justifiant la réponse à l'aide du tableau de variations, si l'affirmation suivante est **vraie** ou **fausse** :

"La courbe représentative de f admet dans le plan muni d'un repère orthonormal, une asymptote verticale d'équation $x = 0$."

Exercice 24 Bac 2024 centres étrangers

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. (a) Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

(b) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

(c) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

(b) On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln (2) − u . . . 0.0001 :
        n=n+1
        u= . . .
    return (u, n)
```

(c) Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction seuil ().

Exercice 25 Bac 2024 Métropole

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

(a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) & = & u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

5. (a) Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
   n = 0
   u =7
   while ... :
      n = n+1
      u = ...
   return n
```

(b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Exercice 26 — Bac E 1979

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. (a) Montrer que pour tout réel x de I, on a $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

(b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur I et en déduire le sens de variation de f sur I.

3. On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan et on note M_1, M_2, M_3 et M_4 les points de $\mathscr{C}_f$ tels que :

- M_1 d'abscisse x_1 point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
- M_2 d'abscisse x_2 point de $\mathscr{C}_f$ où la tangente à $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère.
- M_3 d'abscisse x_3 point de $\mathscr{C}_f$ où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
- M_4 d'abscisse x_4 point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Déterminer les valeurs exactes de x_1,x_2,x_3 et x_4.

4. Démontrer que :

(a) x_1, x_2, x_3 et x_4, pris dans cet ordre, constituent les termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

(b) $\ln x_1$, $\ln x_2$, $\ln x_3$ et $\ln x_4$, pris dans cet ordre, constituent les termes d'une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 27 Bac 2010

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(1+x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. (a) Étudier le sens de variation de la fonction f.

(b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

(a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} g(x)$.

(b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(c) Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

(d) Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;\,3]$.

(e) À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$.
En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.

2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 28 Bac Liban 2019

La Pyrale du buis est une espèce de lépidoptères de la famille des Crambidæ, originaire d'Extrême-Orient. Introduite accidentellement en Europe dans les années 2000, elle y est devenue invasive. Une étude décomptant le nombre de chenilles de Pyrale dans un camping d'Ardêche donne les estimations suivantes.

Date	01/06/18	02/06/18	03/06/18
n	0	1	2
Nombre de chenilles en centaines	97	181	258

L'exercice étudie et compare deux modélisations de l'évolution du nombre de chenilles.

Partie 1 : *Modèle 1*

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite géométrique (u_n) de raison $q = 1,63$. Ainsi $u_0 = 97$.

1. Calculer u_2. Arrondir à l'unité.

2. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

3. Justifier que la suite (u_n) est croissante.

4. Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.

Partie 2 : *Modèle 2*

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite (v_n) telle que

$$v_0 = 97 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 0,91 v_n + 93.$$

1. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{3}\left(-2\ 809 \times 0,91^n + 3\ 100\right).$$

Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.

2. En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$, montrer que la suite (v_n) est croissante.

Partie 3 : *Comparaison des différents modèles*

La valeur relevée dans le camping le 13 juin 2018 est de 745 centaines de chenilles.

1. À partir de ce relevé, quel modèle paraît le plus adapté ?

2. On reprend l'étude du deuxième modèle.

(a) Résoudre l'inéquation : $v_n \geqslant 1\ 000$.

(b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 29 — Bac Asie 2024

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x)=x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x)=x-\ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x)=1$.
Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x)=x$.

Partie C : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=f\left(u_n\right)=u_n^2-u_n\ln\left(u_n\right).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n

$$\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.
On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell)=\ell$.

3. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 30 Problème type Bac

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}} & \text{si} \quad x\geq 0\\ x^2+2x\ln(-x) & \text{si} \quad x<0.\end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est continue en 0.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

4. Dans cette question, on souhaite étudier la dérivabilité à droite de 0 de la fonction f, c'est-à-dire déterminer si $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est une quantité finie ou infinie.

(a) Montrer que pour tout $x>0$

$$\frac{f(x)}{x}=\sqrt{\frac{2}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{-2x}\right)}.$$

(b) En déduire que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis conclure.

5. Étudier la dérivabilité de f à gauche de 0.

6. On considère la fonction auxiliaire ϕ définie sur $]-\infty\,;\,0[$ par $\phi(x)=x+1+\ln(-x)$.

(a) Donner une expression de $\phi'(x)$ pour tout $x < 0$.

(b) En déduire que pour tout $x < 0$, $\phi(x) \leq 0$.

(c) Montrer que pour tout $x < 0$, $f'(x) = 2\phi(x)$.

(d) Donner le tableau de variations de la fonction f.

7. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\begin{cases} u_1 & = 1 \\ u_{n+1} & = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2n}}}, \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

Soit $(v_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique définie par $v_n = u_n^2 - u_{n-1}^2$.

(a) Montrer que $(v_n)_{n\geq 2}$ est une suite géométrique en précisant sa raison et son premier terme.

(b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 2$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} v_k = v_2 + v_3 + v_4 + \cdots + v_n = \frac{1 - \mathrm{e}^{2-2n}}{\mathrm{e}^2 - 1}.$$

(d) **Question difficile.**

En déduire que pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{f(n)}{f(1)}$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

III Test de fin de chapitre

Pour chaque question, cocher la ou les bonnes réponses.

1. L'expression $\ln\left(\frac{e}{2}\right)+\ln 4$ est égale à

- ☐ a) $\frac{\ln 4}{2}$
- ☐ b) $1+\ln 2$
- ☐ c) $\frac{1+\ln 2}{2}$
- ☐ d) 1

---

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x\ln 2}$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- ☐ a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\ln 2 f(x)$
- ☐ b) f est convexe sur $\mathbb{R}$
- ☐ c) f est croissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ d) L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=16$ est $S=\{4\}$

---

3. Dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $e^{2x}-1=6e^{-2x}$ admet :

- ☐ a) Aucune solution
- ☐ b) Deux solutions de signes contraires
- ☐ c) Une solution égale à $\ln\left(\sqrt{3}\right)$
- ☐ d) Une solution égale à $\frac{3}{2}$

4. On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\ln\left(\frac{e^2}{f(x)}\right)$ où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	3

- ☐ a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=2-\ln(f(x))$
- ☐ b) $g(0)=2$
- ☐ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$
- ☐ d) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=\frac{-f'(x)}{f(x)}$

---

5. On considère l'expression $A=2\times\left(\frac{\ln\left(\sqrt{e}\right)\times 2}{e^{\ln(\sqrt{2})}}\right)^2$.

- ☐ a) $A=4$
- ☐ b) $A=1$
- ☐ c) $A=e$
- ☐ d) $A=\sqrt{2}$

---

6. On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{3x-2}$. Alors

- ☐ a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- ☐ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1,5$
- ☐ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
- ☐ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

---

7. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{N}$ de l'inéquation $2^n < 5$ est

☐ a) $S = \mathbb{N}$

☐ b) $S = \mathbb{N}^*$

☐ c) $S = \emptyset$

☐ d) $S = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$

---

8. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Une expression de $f'(x)$ est

☐ a) $f'(x) = \dfrac{-1}{2x}$

☐ b) $f'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$

☐ c) $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

☐ d) $f'(x) = \dfrac{-1}{2x^2}$

---

9. On considère la fonction f définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\ln(\sqrt{x})\right)$.
On note f' sa fonction dérivée. Une expression de $f'(x)$ est

☐ a) $\dfrac{1}{\ln x}$

☐ b) $\dfrac{1}{x \ln x}$

☐ c) $\dfrac{1}{x \ln(\sqrt{x})}$

☐ d) $\dfrac{1}{x \ln(\ln x)}$

---

10. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln. L'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère est égale à

☐ a) 1

☐ b) 0

☐ c) -1

☐ d) e