Chapitre 7

Probabilités : la loi binomiale

Les objectifs du chapitre

Contenu

- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité dune issue $(x_1, \cdots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i
- Représentation par un produit cartésien, par un arbre
- Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli
- Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes
- Loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux

Capacités attendues

- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales
- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale
- Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès
- Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(k \leq X \leq k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1 - \alpha$

Démonstration

- Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli

Exemples d'algorithme

- Simulation de la planche de Galton
- Problème de la surréservation. Étant donné une variable aléatoire binomiale X et un réel strictement positif α, détermination du plus petit entier k tel que $P(X > k) \leq \alpha$
- Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire

Approfondissements possibles

- Loi géométrique
- Introduction de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Interprétation (évènements rares).

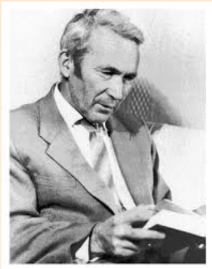
I Le cours

1. Modélisation d'une expérience aléatoire

Expérience aléatoire

La théorie des probabilités est aujourd'hui une branche à part entière des mathématiques. Elle a pour objet l'analyse mathématique de phénomènes dans lesquels le hasard intervient. Le mot "hasard" est d'origine arabe : Az-zahr, qui signifie le dé. Ce mot est apparu en français pour signifier tout d'abord un jeu de dés, puis un évènement non prévisible.
La théorie des probabilités a de nombreuses applications spectaculaires et inattendues comme en économie (marchés boursiers), en médecine (traitement d'images), en physique (mécanique quantique, formation de gouttes d'eau) ou encore en météorologie.
Les fondations de la théorie moderne des probabilités ont été posées par le mathématicien russe Andreï Kolmogorov en 1933.

Andreï Kolmogorov (1903-1987)



Mathématicien soviétique et l'un des plus grands mathématiciens du XX^{e} siècle. Kolmogorov est connu pour ses apports significatifs en théorie des probabilités, en analyse fonctionnelle, en mécanique classique et en systèmes dynamiques. Il porta un intérêt tout particulier à l'étude des mouvements des planètes en se basant sur ses recherches en probabilités.
Sa bibliographie complète comporte plus de 500 publications. Il était admiré par ses collègues mathématiciens du monde entier et donnait l'impression qu'il démontrait tous les théorèmes qu'il voulait.
Il publie en 1933 l'article « Fondements de la théorie des probabilités », une modeste monographie de 60 pages dans laquelle il reconstruit rigoureusement toute la théorie des probabilités.

Définition 1 : expérience aléatoire

Une expérience est dite **aléatoire** lorsque :

- l'expérience est renouvelable dans des conditions identiques (pour autant que l'observateur puisse s'en assurer) ;
- l'expérience a plusieurs résultats possibles appelés issues ;
- on ne peut pas prévoir quelle issue se produira.

Exemples

❶ Lancer un dé cubique numéroté de 1 à 6 et lire le chiffre obtenu sur la face supérieure est une expérience aléatoire : on ne peut pas prévoir le résultat malgré la connaissance des issues possibles.

❷ Durée de vie d'une ampoule électrique.

❸ Évolution du prix d'un actif financier au cours du temps.

La première étape de la modélisation mathématique d'une expérience aléatoire consiste à spécifier l'ensemble de tous les résultats possibles, appelé univers. On représente cet ensemble par la lettre Ω.
Ω, dernière lettre (majuscule) de l'alphabet grec, se lit oméga et désigne traditionnellement "le tout".
Dans l'exemple ❶ ci-dessus, l'univers Ω est $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$. Dans l'exemple ❷, l'univers Ω est $[0\ ;\ +\infty[$.

Variable aléatoire : un exemple introductif

Un joueur lance un dé cubique équilibré numéroté de 1 à 6. Il s'agit d'une expérience aléatoire dont on connait les issues $\{1;2;3;4;5;6\}$, mais dont on ne peut pas prévoir le résultat.

On considère le protocole de jeu suivant :

- ☞ si le résultat obtenu est 2 : le joueur gagne 2 euros.
- ☞ si le résultat obtenu est 4 : le joueur gagne 1 euro.
- ☞ si le résultat obtenu est 6 : le joueur gagne 3 euros.
- ☞ si le résultat obtenu est impair : le joueur perd 5 euros.

On note X la fonction qui donne le gain algébrique du joueur. Ce gain peut donc être négatif en cas de perte. On a alors

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{X} : 1 \longmapsto -5 & \text{l'image de 1 par la fonction X est } -5 \\
\mathrm{X} : 2 \longmapsto +2 & \text{l'image de 2 par la fonction X est } +2 \\
\mathrm{X} : 3 \longmapsto -5 & \text{l'image de 3 par la fonction X est } -5 \\
\mathrm{X} : 4 \longmapsto +1 & \text{l'image de 4 par la fonction X est } +1 \\
\mathrm{X} : 5 \longmapsto -5 & \text{l'image de 5 par la fonction X est } -5 \\
\mathrm{X} : 6 \longmapsto +3 & \text{l'image de 6 par la fonction X est } +3
\end{array}$$

La fonction X est appelée variable aléatoire. Elle est définie sur l'univers $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

Définition 2 : variable aléatoire

Une variable aléatoire X est **une fonction** définie sur l'univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

⚠ Ne pas confondre l'ensemble des issues possibles, appelé univers et noté Ω ; et l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X, noté $\mathrm{X}(\Omega)$.
Dans l'exemple précédent, on a $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ et $X(\Omega) = \{-5\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.
Lorsque $\mathrm{X}(\Omega)$ est un ensemble fini, la variable aléatoire X est dite **discrète**.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est à la base du raisonnement probabiliste moderne.
Dans l'exemple de la section précédente, on a vu que la variable aléatoire X prenait quatre valeurs. Quelle est la probabilité que X soit égale à -5 par exemple ?
L'évènement $\{\mathrm{X} = -5\}$ se réalise quand le joueur obtient un nombre impair. Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = -5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

De la même manière, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) = \frac{1}{6}.$$

On regroupe toutes ces valeurs dans un tableau qui représente **la loi de probabilité** de la variable aléatoire X :

x_i	-5	1	2	3
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On remarque au passage que la somme de toutes les probabilités est égale à 1 :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = 1.}$$

Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

Il existe de nombreux **indicateurs** qui permettent de mieux décrire une variable aléatoire.

Définition 3 : espérance - variance - écart-type

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n avec respectivement les probabilités p_1, p_2, ..., p_n.

- **L'espérance** de X est nombre réel, noté E(X), défini par

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

  Interprétation : l'espérance de X peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée "un très grand nombre de fois".

- **La variance** de X est le nombre réel **positif**, noté V(X), défini par

$$\boxed{\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2\, p_i}$$

- **L'écart-type** de la variable aléatoire X, noté σ(X), est la racine carrée de sa variance. Ainsi

$$\boxed{\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{V(\mathrm{X})}}$$

  Remarque : la variance et l'écart-type mesurent la dispersion des valeurs prises par X autour de l'espérance. Ainsi plus σ(X) est grand, plus les valeurs seront dispersées.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Mathématicien et astronome français. Laplace a apporté des contributions fondamentales dans différents champs des mathématiques, en particulier en théorie des probabilités.
On lui doit en 1812 la formule suivante, qui permet d'exprimer, pour de grandes valeurs de x, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ sous la forme d'une somme infinie :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1\times 3}{2^2x^5} - \frac{1\times 3\times 5}{2^3x^7} + \cdots\right).$$

Il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'astronomie mathématique. Dans son ouvrage "Traité de mécanique céleste", il transforme l'approche géométrique de la mécanique développée par Newton en une approche fondée sur l'analyse mathématique.

2. Loi binomiale

Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition 4 : épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues, **succès** (noté S) et **échec** (noté $\overline{\mathrm{S}}$).

Définition 5 : loi de Bernoulli

On considère une épreuve de Bernoulli où la probabilité du succès est notée p.
X désigne la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$.
On a alors $X(\Omega) = \{0 \,;\, 1\}$ et la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

✿ $E(X) = p$

✿ $V(X) = p(1-p)$

Les lois de Bernoulli servent à modéliser les épreuves à deux issues : succès ou échec.

Définition 6 : schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**.

Jacques Bernoulli (1655-1705)

Jakob ou Jacques Bernoulli est un mathématicien et physicien suisse. Ses premiers travaux portent sur le calcul différentiel. C'est à lui qu'on doit le premier emploi du terme "calcul intégral".
Il donne ensuite une preuve rigoureuse de la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ sans obtenir la valeur exacte de cette somme. Il s'agit de calculer la somme suivante qui contient une infinité de termes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

Un autre mathématicien suisse, Léonard Euler, prouve en 1741 que cette somme est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$.
Jacques Bernoulli s'intéresse également à la théorie des probabilités. Il donne la première définition d'une variable aléatoire, démontre la loi faible des grands nombres pour le jeu du pile ou face (qu'on appelle maintenant schéma de Bernoulli) et introduit la loi binomiale.
La loi uniforme discrète sur $\{1 \,;\, 2 \,;\, ... \,;\, n\}$ apparait pour la première fois en 1711 dans la thèse du mathématicien Nicolas Bernoulli, neveu de Jacques Bernoulli !

Loi binomiale $\mathscr{B}(n \,;\, p)$

Définition 7 : loi binomiale de paramètres nv et p

On considère un schéma de Bernoulli de n épreuves et de paramètre p.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès de ces n épreuves.

- ➤ La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p.
- ➤ On dit X suit la loi $\mathscr{B}(n \,;\, p)$ et on note $X \sim \mathscr{B}(n \,;\, p)$.

Définition 8 : les coefficients binomiaux

les coefficients binomiaux, définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier naturel k tel que $k \leq n$, donnent **le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments**. On les note $\binom{n}{k}$ et on les définit par

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{où} \qquad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}$$

Par convention

$$\boxed{0! = 1}$$

Déterminer un coefficient binomial à l'aide de la calculatrice

Modèle	Coefficient binomial $\binom{n}{k}$
Casio	OPTN F6 (▷) F3 (PROB) n F3 (nCr) k EXE
Texas Instrument	n math ▶▶▶ (PROB) 3 (Combinaison) k entrer
Numworks	paste " Dénombrement ▷ binomial (n,k) OK n ▷ k exe

Les coefficients binomiaux apparaissent de manière très naturelle lors de l'écriture des différentes identités remarquables du type $(a+b)^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Par exemple, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 = \left(a^2+2ab+b^2\right)\left(a^2+2ab+b^2\right)$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$
$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$

Remarque

Dans chaque terme de la somme ci-dessus, la somme des exposants est égale à 4.
Ainsi $4 = 4+0 = 3+1 = 2+2 = 1+3 = 0+4$.
On écrit

$$\boxed{(a+b)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k b^{4-k} \qquad \text{où} \qquad k + (4-k) = 4.}$$

.

Propriété 1 :

Si $X \sim \mathscr{B}(n\ ;\ p)$, alors

- pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

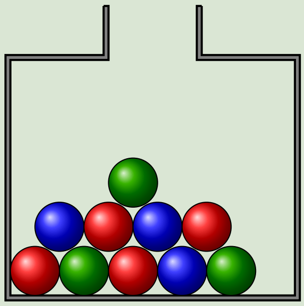
-

$$\boxed{E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$$

Les lois binomiales modélisent le nombre de succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

Méthode 1 : tirages successifs avec remise

Une urne contient 4 boules rouges, 3 bleues et 3 vertes. On tire au hasard, successivement et avec remise, trois boules.
X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges.



❶ Justifier que la situation peut être modélisée par une loi binomiale. Quelles sont les valeurs des paramètres n et p ?

❷ Calculer $P(X = 1)$.

Corrigé

❶ ➤ Épreuve de Bernoulli : succès S est "obtenir une boule rouge " et $p = P(S) = \frac{4}{10} = 0,4$.

➤ Schéma de Bernoulli : on répète cette épreuve de Bernoulli trois fois, donc $n = 3$.
De plus, ces épreuves sont **indépendantes**.

➤ Loi binomiale : X donne le nombre de succès. Donc $X \sim \mathscr{B}(3\ ;\ 0,4)$.

❷ On a

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \times 0,4^1 \times (1 - 0,4)^{3-1} = 3 \times 0,4 \times 0,6^2.$$

Ainsi

$$\boxed{P(X = 1) = 0,432.}$$

Utilisation de la calculatrice pour déterminer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$

	Casio	Texas Instrument	NumWorks
$P(X = k)$	MENU 2 (STAT) F5 (DIST) F5 (BINOMIAL) F1 BPD	2nde VAR (distrib) ▾ binomFreP **nbreEssai :** saisir n **p :** saisir p **valeur de X :** saisir k	Probabilites OK Binomiale ▸ Saisir n et p et cliquer sur l'icône et dérouler le menu pour choisir . Saisir k puis OK.
$P(X \leqslant k)$	F5 (DIST) F5 (BINOMIAL) F2 (Bdc)	2nde VAR (distrib) ▾ binomFreP **nbreEssai :** saisir n **p :** saisir p **valeur de X :** saisir k	Probabilites OK Binomiale ▸ Saisir n et p et cliquer sur l'icône et dérouler le menu pour choisir . Saisir k puis OK.

II Les exercices

Exercice 1 Bac Métropole juin 2021 J1

Probabilités conditionnelles Loi binomiale

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : " positif " ou bien " négatif ".
On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.
On note P(E) la probabilité d'un évènement E.
On considère les évènements suivants :

- D : " la pièce est défectueuse " ;
- T : " la pièce présente un test positif " ;
- $\overline{\mathrm{D}}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à $0,98$;
- la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à $0,97$.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. (a) Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.

(b) Démontrer que : $\mathrm{P(T)} = 0,0775$.

3. On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à $0,95$.
Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que $\mathrm{P(D)} = 0,05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.
On donnera un résultat arrondi au centième.

3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2 D'après Bac Métropole juin 2012

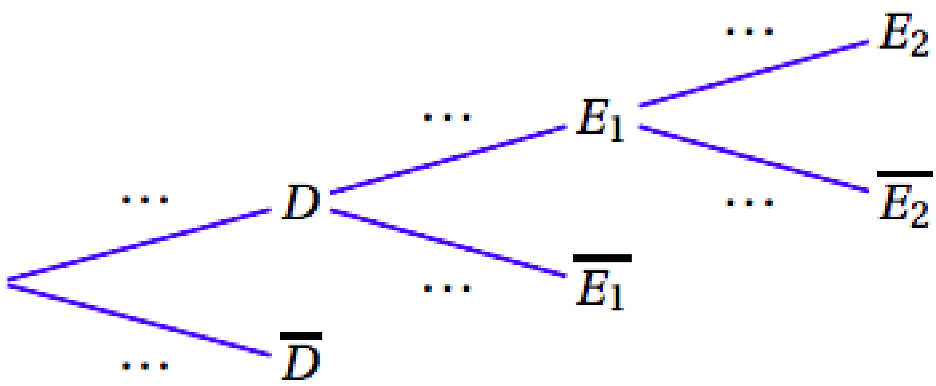
Probabilités conditionnelles Variable aléatoire Loi binomiale

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier.
40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.
Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus.
Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
On considère les évènements suivants :

- D : " Le candidat est retenu sur dossier ";
- E_1 : " Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien ";
- E_2 : " Le candidat est recruté ".

(a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



(b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

(c) On note F l'évènement " Le candidat n'est pas recruté ".
Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

(b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

Exercice 3 — D'après Bac 2021

Probabilités conditionnelles
Variable aléatoire
Loi binomiale
Algorithmique
Logarithme et inéquation

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : "Le chat est porteur de la maladie" ;
- T : "Le test du chat est positif" ;
- $\overline{\mathrm{M}}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1. (a) Traduire la situation par un arbre pondéré.

(b) Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

(c) Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à $0,45$.

(d) On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

(a) Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.

(b) Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

(c) Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

(d) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

(a) Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.

(b) Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable p un nombre réel.

(c) Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

```python
def seuil():
    n,p=0,0
    while p<0.99:
        n=n+1
        p=1-0.55**n
    return n
```

Exercice 4 D'après Bac Métropole septembre 2008

Probabilités conditionnelles
Loi de probabilité d'une variable aléatoire
Espérance d'une variable aléatoire
Suites numériques
Logarithme et inéquation

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les évènements :

- E : " à l'issue de la partie, les deux cases obtenues sont rouges " ;
- F : " à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ".

Montrer que $P(E) = 0,02$ et $P(F) = 0,17$.

3. Si les deux cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

(a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1-(0,9)^n$.

(b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

(c) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

Exercice 5 D'après Bac Liban mai 2003

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.

2. On considère les évènements suivants :
B_n : " On tire une boule blanche lors du n-ième tirage ",
U_n : " On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ".

(a) Calculer la probabilité de l'évènement B_n.

(b) Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n.

(c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

(a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 6 D'après Bac centres étrangers J1

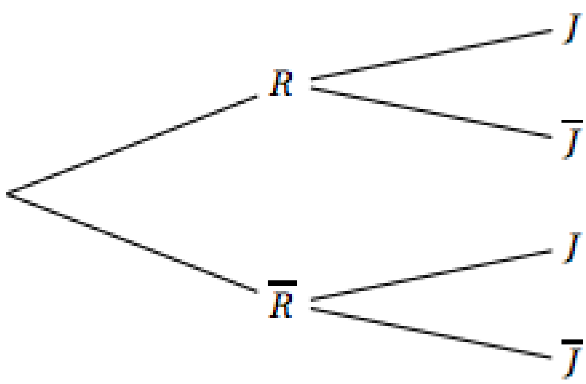
Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

Partie A

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : " La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ".
- J l'évènement : " La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ".

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.

4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.

2. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)$ et interpréter le résultat.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

Exercice 7 D'après Bac Asie 2021

Dénombrement
Loi de probabilité d'une variable aléatoire
Espérance d'une variable aléatoire
Loi binomiale

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).
Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.
On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle **et** d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.

(a) Déterminer le nombre de tirages possibles.

(b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à -dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).

(a) Déterminer la loi de probabilité de G.

(b) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?

3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

(b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.

(c) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. Donner une interprétation du résultat obtenu.

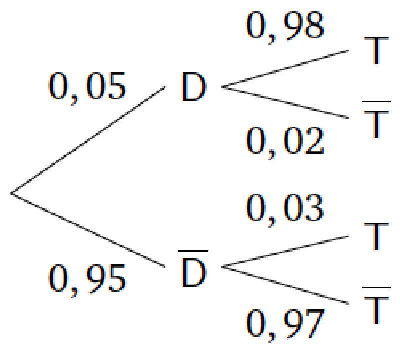
(d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq n) \geq 0,9$.

III Un corrigé

Exercice 1 Bac Métropole juin 2021 J1

Partie I

1. L'arbre pondéré qui suit traduit la situation de l'exercice.



2. (a) On a $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98$.
Donc

$$\boxed{P(D \cap T) = 0,049.}$$

(b) On a $P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,95 \times 0,03 = 0,0285$.
Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers Ω, donc par la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T)$$
$$P(T) = 0,049 + 0,0285.$$

Par conséquent

$$\boxed{P(T) = 0,0775.}$$

3. Il s'agit dans cette question de calculer la probabilité $P_T(D)$.
D'après la définition d'une probabilité conditionnelle

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}$$

définition qui a un sens car $P(T) > 0$. On a donc

$$P_T(D) = \frac{0,049}{0,0775} \approx 0,63.$$

Ainsi $P_T(D) < 0,95$ ce qui veut dire que ce test n'est pas efficace.

Partie II

1.
- ➤ Épreuve de Bernoulli : chaque expérience a deux issues : succès avec une probabilité égale à $P(D) = 0,05$ et échec avec une probabilité égale à $1 - 0,05 = 0,95$.
- ➤ Schéma de Bernoulli : on répète cette épreuve de Bernoulli vingt fois. De plus les épreuves sont identiques et indépendantes (tirage avec remise).
- ➤ Loi binomiale : X donne le nombre de succès.

Il s'ensuit que

$$\boxed{X \sim \mathscr{B}(20 ; 0,05).}$$

2. On a

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0).$$

Or,

$$P(X = 0) = \binom{20}{0} \times p^0 \times (1-p)^{20-0} = \binom{20}{0} \times 0,95^{20}.$$

Donc

$$\boxed{P(X \geq 1) \approx 0,64.}$$

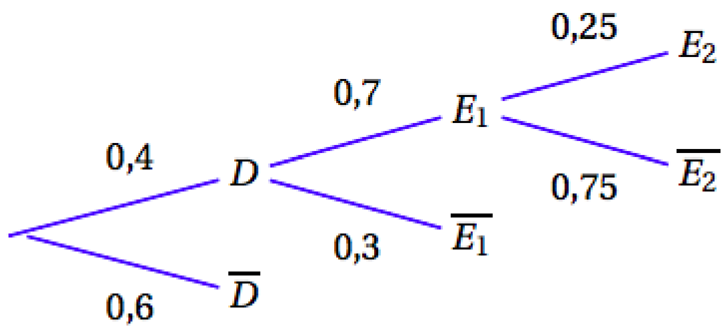
3. On sait que $E(X) = np$.
Donc

$$\boxed{E(X) = 20 \times 0,05 = 1.}$$

Interprétation : sur un grand nombre d'expériences, on trouvera une pièce défectueuse sur vingt pièces tirées.

Exercice 2 D'après Bac Métropole juin 2012

1. (a) L'arbre pondéré attendu :



(b) On a

$$P(E_1) = P(E_1 \cap D) + P(E_1 \cap \overline{D})$$
$$P(E_1) = P(D) \times P_D(E_1) + P(\overline{D}) \times \underbrace{P_{\overline{D}}(E_1)}_{=0}$$
$$P(E_1) = 0,4 \times 0,7$$

Ainsi

$$\boxed{P(E_1) = 0,28.}$$

(c) Calculons d'abord la probabilité d'être recruté.
On a $P(\overline{F}) = P(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$
Il s'ensuit que $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - 0,07$.
Donc

$$\boxed{P(F) = 0,93.}$$

2. (a)
- ➤ Épreuve de Bernoulli : chaque expérience a deux issues : succès "être recruté" avec une probabilité égale à $0,07$ et échec avec une probabilité égale à $1 - 0,07 = 0,93$. Ici $p = 0,07$
- ➤ Schéma de Bernoulli : on répète cette épreuve de Bernoulli cinq fois. Donc $n = 5$.
De plus les épreuves sont identiques et indépendantes.

➤ Loi binomiale : X donne le nombre de succès.
Il s'ensuit que

$$\boxed{X \sim \mathscr{B}(5\ ;\ 0,07).}$$

(b) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$. Donc

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times p^2 \times (1-p)^{5-2} = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3.$$

On obtient

$$\boxed{P(X = 2) \approx 0,039 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

3. Notons n le nombre de candidats qui se présentent à un poste de cadre.
La probabilité qu'aucun candidat ne soit recruté est égale à

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^{n-0} = 0,93^n.$$

L'évènement contraire de "aucun candidat n'est recruté" est "au moins un candidat est embauché". Ainsi la probabilité qu'au moins un candidat soit embauché est égale à

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,93^n.$$

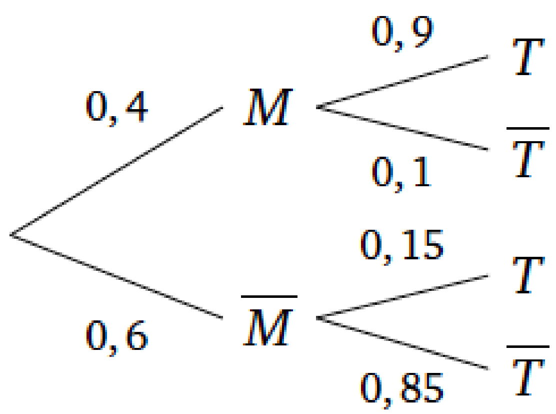
Il ne reste plus qu'à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $P(X \geq 1) > 0,999$.
On a donc

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) > 0,999 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 0,93^n > 0,999 \\
&\Leftrightarrow \quad 0,93^n < 0,001 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(0,93^n) < \ln(0,001) \qquad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\Leftrightarrow \quad n\ln(0,93) < \ln(0,001) \qquad \text{grâce aux propriétés algébriques de la fonction } \ln \\
&\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \qquad (\ln(0,93) < 0 \text{ car } 0 < 0,93 < 1).
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \approx 95,19$.
Ainsi le nombre minimum de dossiers à traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$ est égal à 96.

Exercice 3 D'après Bac 2021

1. (a) L'arbre pondéré attendu :



(b) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9$. Donc

$$\boxed{P(M \cap T) = 0,36.}$$

(c) M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers associé à l'expérience aléatoire de l'exercice, donc par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) \\ &= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,4 \times 0,9 + 0,6 \times 0,15 = 0,36 + 0,09. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\boxed{P(T) = 0,45.}$$

(d) Par définition de la probabilité de M sachant T où $P(T) \neq 0$

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,36}{0,45} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}.$$

Par conséquent

$$\boxed{P_T(M) = 0,8.}$$

2. (a) ➤ épreuve de Bernoulli : chacune a deux issues : succès T : "le test du chat est positif" avec une probabilité $p = P(T) = 0,45$ et échec $\overline{T}$ avec probabilité $1 - p = 0,55$.

➤ schéma de Bernoulli : on répète cette épreuve de Bernoulli vingt fois. Donc $n = 20$. De plus ces épreuves sont indépendantes (tirage avec remise).

Ainsi

$$\boxed{X \sim \mathscr{B}(20\,;\,0,45).}$$

(b) On a $P(X = 5) = \binom{20}{5} \times (0,45)^5 \times (0,55)^{15}$, d'où

$$\boxed{P(X = 5) \approx 0,036.}$$

(c) La calculatrice donne

$$\boxed{P(X \leq 8) \approx 0,414.}$$

(d) Par définition $E(X) = n \times p$. Donc

$$\boxed{E(X) = 9.}$$

3. (a) $X \sim \mathscr{B}(n\,;\,0,45)$. On a $p_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

Or, $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n$.

Par conséquent

$$\boxed{p_n = 1 - 0,55^n.}$$

(b) Le tableau ci-dessous résume les étapes d'exécution du programme donné

n	p	$p < 0,99$?	nouvelle valeur de n
0	0	oui	1
1	0,45	oui	2
2	0,6975	oui	3
3	0,833625	oui	4
4	0,90849375	oui	5
5	0,9496715625	oui	6
6	0,972319359375	oui	7
7	0,9847756476562	oui	8
8	$0,9916266062109$	non	$\times$

(c) On résout l'inéquation $1 - 0,55^n < 0,99$ équivalente à

$$\begin{aligned} 0,55^n > 0,01 &\iff n\ln(0,55) > \ln(0,01) && \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff n < \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)} && \text{car } \ln(0,55) < 0. \end{aligned}$$

Ainsi tant que $n < \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)}$, on a $p < 0,99$. Donc dès que $n \geq \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)}$, on a $p \geq 0,99$.

Or,

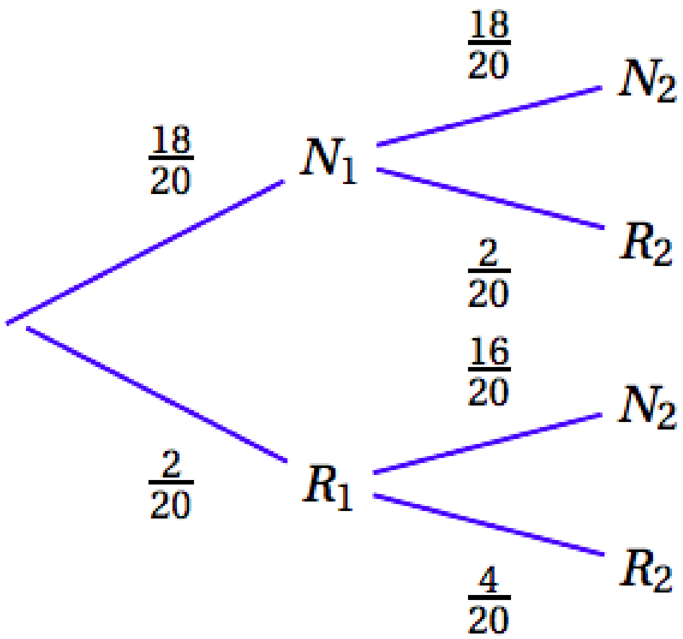
$$\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)} \approx 7,703.$$

Par conséquent

$$\boxed{n = 8.}$$

Exercice 4 D'après Bac Métropole septembre 2008

1. On a l'arbre pondéré suivant



2. ➤ On a

$$P(E) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{20} \times \frac{4}{20} = \frac{1}{50}.$$

Ainsi

$$\boxed{P(E) = 0,02.}$$

➤ On a

$$P(F) = P(N_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap N2) = \frac{18}{20} \times \frac{2}{20} + \frac{2}{20} \times \frac{16}{20} = \frac{9}{100} + \frac{4}{50} = \frac{17}{100}.$$

Ainsi

$$\boxed{P(F) = 0,17.}$$

3. (a) La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant

x_i	-1	1	9
$P(X = x_i)$	$0,81$	$0,17$	$0,02$

(b) L'espérance de X est

$$E(X) = -1 \times 0,81 + 1 \times 0,17 + 9 \times 0,02 = -0,46.$$

Interprétation : Le joueur perd en moyenne 0,46 € par partie.

4. (a) Notons Y la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur lance la roue B.
Alors $Y \sim \mathscr{B}(n\ ;\ 0,1)$ et la probabilité que le joueur ne lance aucune fois la roue B est égale à

$$P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0,1^0 \times 0,9^{n-0} = 0,9^n.$$

En utilisant l'évènement contraire, il vient

$$p_n = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,9^n.$$

(b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$.
Donc par opérations sur les limites, la suite (p_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$.

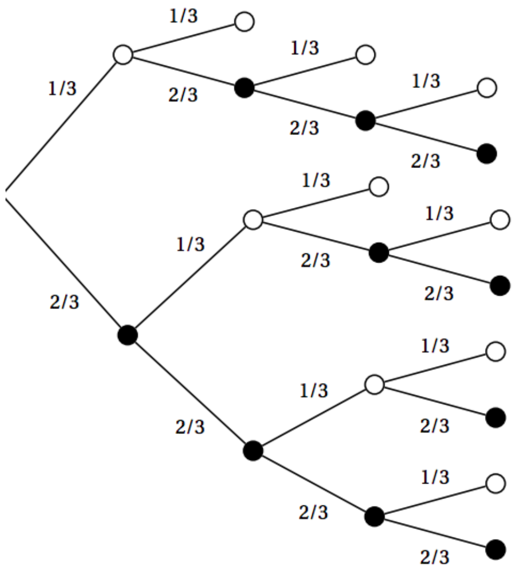
(c) On a

$$\begin{aligned}
p_n > 0,9 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 0,9^n > 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad -0,9^n > -0,1\\
&\Leftrightarrow \quad 0,9^n < 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0,9^n) < \ln(0,1)\\
&\Leftrightarrow \quad n\ln(0,9) < \ln(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \approx 21,85$. Donc la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$ est 22.

Exercice 5 D'après Bac Liban mai 2003

1. La probabilité de tirer une boule blanche à chaque tirage est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, donc celle de tirer une boule noire est égale à $\frac{2}{3}$.
En construisant le début de l'arbre pondéré modélisant la situation, on a



$$p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}.$$

$$p_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{27}.$$

Et

$$p_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{4}{27}.$$

2. (a) Quel que soit n, $, B_n = \frac{1}{3}$.

(b) U_n est réalisé si dans les $(n-1)$ premiers tirages il y a exactement tirage d'une boule blanche. Ce tirage peut se produire à $(n-1)$ endroits ; on a donc pour $n \geqslant 2$

$p\left(U_n\right) = (n-1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

(c) Les tirages étant indépendants, on a :

$p_n = p\left(U_n\right) \times p\left(B_n\right) = \frac{1}{3} \times (n-1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = (n-1)\frac{1}{3^2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} =$
$(n-1)\frac{2^{n-2}}{3^n} = (n-1)\frac{1}{2^2}\frac{2^{n-2}}{3^n} = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

(a) • *Initialisation*

Pour $n = 2$, $S_2 = p_2 = \frac{1}{9}$.

Or $1 - \left(\frac{2}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{4}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.

La relation est vraie au rang 2.

• *Hérédité* On suppose que pour un certain entier n tel que $n \geqslant 2$, on a

$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Comme $S_{n+1} = S_n + p_{n+1} = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{3n}{4} + \frac{3}{2} - \frac{n}{4}\right) =$
$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) = 1 - \left(\frac{n+1}{2} + 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 2 et si elle est vraie à un rang au moins égal à 2, elle est vraie au rang suivant : d'après le principe de récurrence la propriété est donc démontrée pour tout naturel $n \geqslant 2$.

(b) On a $S_n = 1 - \frac{n}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

- Limite de $\frac{n}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$:

$\frac{n}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{n}{2}\mathrm{e}^{n\ln\frac{2}{3}} = \frac{n\ln\frac{2}{3}\mathrm{e}^{n\ln\frac{2}{3}}}{2\ln\frac{2}{3}}$.

Or $\ln\frac{2}{3} < 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\frac{2}{3} = -\infty$.

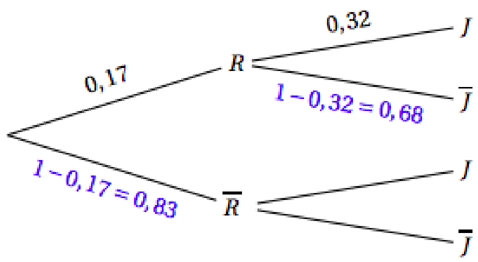
Le numérateur est de la forme $X\mathrm{e}^X$ et on sait que $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$.

On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Exercice 6 D'après Bac centres étrangers J1

Partie A

1. On représente la situation à l'aide de cet arbre pondéré



2. $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544$

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française, donc $P(J) = 0,11$.

La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $P\left(\overline{R} \cap J\right)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(J) = P(R\cap J) + P\left(\overline{R}\cap J\right)$ donc $P\left(\overline{R}\cap J\right) = P(J) - P(R\cap J) = 0,11 - 0,0544 = 0,0556$

soit $0,056$ Ã 10^{-3} près.

4. $P_{\overline{R}}(J) = \frac{P\left(\overline{R}\cap J\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{0,056}{0,83} \approx 0,0675$

La proportion de jeunes de 18 Ã 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ 6,75 %.

Partie B

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement Ã un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1.
- On interroge une personne au hasard et il n'y a que deux possibilités : elle utilise régulièrement les transports en commun, avec une probabilité $p = 0,17$, ou pas, avec une probabilité de $1 - p = 0,83$.
- On réalise $n = 50$ fois ce questionnement de façon identique.

Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,17$.

2. On a

$$P(X=5)=\binom{50}{5}\times 0,17^5\times(1-0,17)^{50-5}\approx 0,069$$

Il y a donc une probabilité de $0,069$ que, sur 50 personnes interrogées, exactement 5 prennent régulièrement les transports en commun.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Autrement dit, le recenseur affirme que $P(X<13)\geqslant 0,95$.
Or $P(X<13)=P(X\leqslant 12)\approx 0,929<0,95$ donc cette affirmation est fausse.

4. Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est $E(X)=np=50\times 0,17=8,5$.

Exercice 7 D'après Bac Asie 2021

1. (a) Dénombrons les tirages possibles :

- il y a sept tirages contenant la lettre A : AB - AC - AD - AE - AF - AG et AH ;
- il y a six tirages contenant la lettre B : BC - BD - BE - BF - BG et BH (les tirages AB et BA sont identiques) ;
- il y a cinq tirages contenant la lettre C : CD - CE - CF - CG et CH.

En continuant ce procédé

$$\boxed{\text{il y a } 7+6+5+4+3+2+1=28 \text{ tirages possibles.}}$$

(b) Le joueur gagne si le tirage est constitué d'une voyelle et d'une consonne.
Il y a donc

- les six tirages contenant la lettre A et une consonne : AB - AC - AD - AF - AG et AH ;
- les six tirages contenant la lettre E et une consonne : EB - EC - ED - EF - EG et EH.

Au total il y a 12 tirages gagnant sur les 28 tirages possibles.
Ainsi

$$\boxed{\text{la probabilité que le joueur gagne à ce jeu est égale à } \frac{12}{28}=\frac{3}{7}.}$$

2. (a) G désigne la variable aléatoire qui donne le gain algébrique d'un joueur.

- Quand un joueur gagne, il obtient $10-k$ euros ;
- quand il perd, il obtient $-k$ euros.

On a d'après ce qui précède $P(G=10-k)=\frac{3}{7}$ et $P(G=-k)=1-P(G=10-k)=\frac{4}{7}$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire G est résumée dans le tableau suivant :

x_i	$-k$	$10-k$
$P(G=x_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

(b) On commence par calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G :

$$E(G)=\frac{3}{7}(10-k)-\frac{4}{7}k=\frac{30}{7}-\frac{3}{7}k-\frac{4}{7}k=\frac{30}{7}-k.$$

Le jeu reste favorable au joueur tant que $E(X)>0$; si et seulement si $k<\frac{30}{7}$.

Le joueur devra miser moins de $\frac{30}{7}$ € pour que le jeu lui reste favorable.

3. (a)
- Épreuve de Bernoulli : un joueur peut gagner avec probabilité $p = \dfrac{3}{7}$ ou perdre avec probabilité $1 - p = \dfrac{4}{7}$;
- on répète cette épreuve de Bernoulli 10 fois, donc $n = 10$;
- Les répétitions sont identiques et indépendantes car chacun des 10 joueurs remet les deux lettres tirées.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de joueurs gagnants suit bien une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{7}$.

On note $X \sim \mathscr{B}\left(10\ ;\ \dfrac{3}{7}\right)$.

(b) Il s'agit de calculer $P(X = 4)$ et on a d'après le cours

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \times p^4 \times (1-p)^{10-4} \approx 0,247 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

(c) On a

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0,440 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Interprétation : la probabilité qu'au moins 5 joueurs gagnent la partie est d'environ $0,440$.

(d) On traite cette question à l'aide d'une calculatrice.
On a $P(X \leq 5) \approx 0,782$ et $P(X \leq 6) \approx 0,921$.
On conclut que le plus entier naturel n tel que $P(X \leq n) \geq 0,9$ est $n = 6$.