# Chapitre 6

# Géométrie dans l'espace 2

## Les objectifs du chapitre

L'extension à l'espace du produit scalaire de deux vecteurs donne un outil efficace pour les problèmes de distance et d'orthogonalité. Dans cette section, on continue de combiner les outils algébriques (vecteurs, produit scalaire) et la vision géométrique de l'espace, notamment autour de l'orthogonalité : orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite, projection orthogonale sur un plan ou sur une droite.

**Contenu**

- Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité, symétrie
- Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire
- Base orthonormée, repère orthonormé
- Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points
- Développement de $||\vec{u}+\vec{v}||^2$, formules de polarisation
- Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite
- Vecteur normal à un plan. Étant donnés un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$, plan passant par A et normal à $\vec{n}$
- Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan

**Capacités attendues**

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace
- Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures longueur, angle, aire, volume
- Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points

**Démonstration**

- Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M

# I Le cours

## 1. Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

**Définition 1 : produit scalaire de deux vecteurs**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **le réel** défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un de ces deux vecteurs est nul ;
- si $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$
  où $(\vec{u}\ ,\ \vec{v})$ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan où l'on peut les représenter.

## 2. Propriétés du produit scalaire

**Propriété 1 :**

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et soit $k$ un nombre réel.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $k\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

## 3. Bases et repères orthonormés

**Définition 2 : base et repère**

- On dit que $\left(\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$ est une **base orthonormée** de l'espace lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.
  On a donc $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.
- Soit O un point de l'espace.
  $\left(\text{O}\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$ est un **repère orthonormé** lorsque $\left(\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$ est une base orthonormée.

## 4. Expression analytique du produit scalaire

**Propriété 2 : expression analytique et orthogonalité**

Soit $\left(\text{O}\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$ un repère **orthonormé** de l'espace.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, si et seulement si, $xx' + yy' + zz' = 0$.

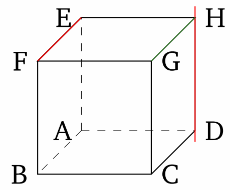
## 5. Orthogonalité de deux droites

**Définition 3 : droites orthogonales**

Deux droites $d$ et $d'$ sont **orthogonales** lorsqu'il existe une droite parallèle à $d$ qui est perpendiculaires à $d'$.

**Exemple**

Dans le cube ABCDEFGH, les droites (EF) et (HD) sont orthogonales car la droite (GH) est parallèle à (EF) et perpendiculaire à (HD).
**Remarque** : Bien que les droites (EF) et (HD) soient orthogonales, elles ne sont pas perpendiculaires car non sécantes.




**Propriété 3 : caractérisation d'orthogonalité de deux droites**

Soit $d$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et soit $d'$ une droite de vecteur directeur $\vec{u'}$.
$d$ et $d'$ sont orthogonales, si et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{u'} = 0$.

## 6. Orthogonalité d'une droite et d'un plan

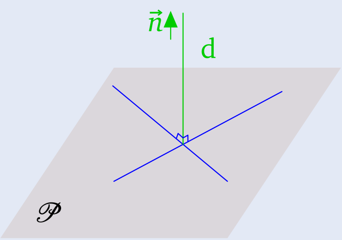
**Définition 4 : droite orthogonale à un plan**

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

**Propriété 4 : droite orthogonale à un plan**

Une droite $d$ est orthogonale à plan $\mathscr{P}$, si et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathscr{P}$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de la droite $d$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.
$d$ est orthogonale à $\mathscr{P}$, si et seulement si,

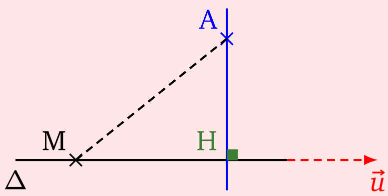
$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0.$$




## 7. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

**Définition 5 : projeté orthogonal d'un point sur une droite**

On considère une droite $\Delta$ de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A tel que $A \notin \Delta$.
Le projeté orthogonal de A sur $\Delta$ est le point d'intersection de la droite $\Delta$ et de la perpendiculaire à cette droite passant par A. La distance de A à $\Delta$ est égale à AH et on écrit $d(A\,,\,\Delta) = AH$.




**Propriété 5 :**

Pour tout point M appartenant à $\Delta$ et distinct de H, on a $AH < AM$.

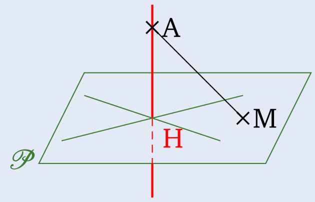
## 8. Projeté orthogonal d'un point sur un plan

**Définition 6 : projeté orthogonal d'un point sur un plan**

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathscr{P}$ et de la droite passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$.

**Propriété 6 : projeté orthogonal d'un point sur un plan**

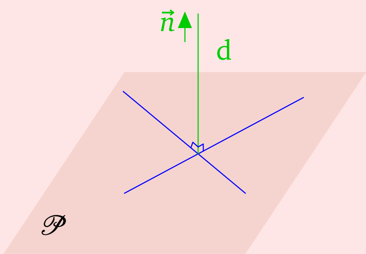
Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point H de $\mathscr{P}$ **le plus proche** de A.
AH est la distance de A à $\mathscr{P}$ et on écrit $d(\mathrm{A}, \mathscr{P}) = \mathrm{AH}$.




## 9. Équation cartésienne d'un plan

**Définition 7 : vecteur normal à un plan**

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **un vecteur normal** à un plan $\mathscr{P}$ si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathscr{P}$.
Il résulte de cette définition que $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$ si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.




**Propriété 7 : ensemble des points M tels que le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}$ soit nul**

Soit A un point de l'espace et soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan $\mathscr{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

**Propriété 8 : équation cartésienne d'un plan**

L'espace est muni d'un repère **orthonormé** $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{i}\,;\, \vec{j}\,,\, \vec{k}\right)$.

- Un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Si les nombres réels $a$, $b$ et $c$ **ne sont pas tous nuls**, alors l'ensemble des points M tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

**Démonstration (exigible)**

- Si $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P}$ où $\mathscr{P}$ est un plan qui passe par le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

  On a alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui donne $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.
  Ceci s'écrit encore $ax + by + cz + \underbrace{(-ax_A - by_A - cz_A)}_{=d} = 0$, c'est-à-dire $ax + by + cz + d = 0$.

- On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $ax + by + cz + d = 0$. Comme $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, l'un au moins de ces trois réels est non nul. Supposons par exemple que $a \neq 0$.

  L'équation de départ devient $a\left(x + \dfrac{d}{a}\right) + by + cz = 0$ ce qui s'écrit sous la forme

  $a\left[x - \left(\dfrac{-d}{a}\right)\right] + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$. Ceci n'est rien d'autre que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ avec $A\left(\dfrac{-d}{a}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$.

  Ainsi l'ensemble $\mathscr{E}$ est le plan qui passe par le point A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

## Méthode 1 : étude de l'intersection d'un plan et d'une droite

Étudier de l'intersection du plan $\mathscr{P} : 2x - y + 3z - 4 = 0$ et de la droite $d$ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 - t \\ y & = & 2 + 2t \\ z & = & 3 + t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

**Corrigé**

On a $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 - t \\ y & = & 2 + 2t \quad\quad (t \in \mathbb{R}) \\ z & = & 3 + t \\ 2x & - & y + 3z - 4 = 0 \end{array}\right.$, ce qui donne $2(2 - t) - (2 + 2t) + 3(3 + t) - 4 = 0$ d'où $t = 7$.

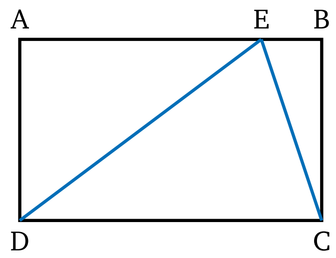
Au final $x = -5$, $y = 16$ et $z = 10$. Ainsi $M(-5\ ;\ 16\ ;\ 10)$ est le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et $d$.

# II Les exercices

## 1. Quelques applications du produit scalaire dans le plan

### Exercice 1 Mesure d'un angle 1

Soit ABCD un rectangle tel que AB = 10 et AD = 6. On considère un point E de [AB] tel que EB = 2.




**1.** Montrer que

$$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}+AD^2$$

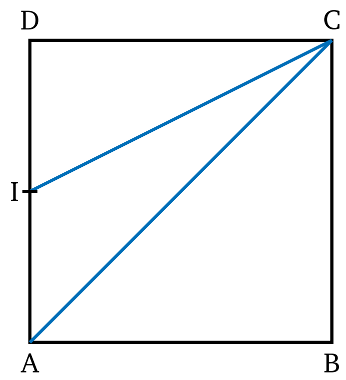
**2.** En déduire que

$$\cos\left(\widehat{DEC}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

**3.** Donner, au degré près, une mesure de $\widehat{DEC}$.

### Exercice 2 Mesure d'un angle 2

On considère un carré ABCD de côté $c$. Soit I le milieu du segment [AD].
L'objectif de cet exercice est de montrer que la mesure de l'angle $\widehat{ICA}$ est indépendante de $c$.




**1.** (a) Exprimer CI et CA en fonction de $c$.
(b) En déduire la relation suivante

$$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{c^2\sqrt{10}}{2}\cos\left(\widehat{ICA}\right) \qquad (①)$$

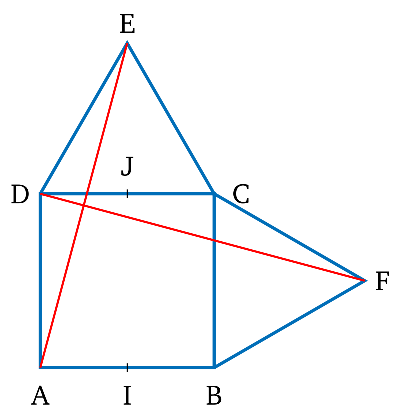
**2.** (a) Exprimer $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$.
(b) En déduire la relation suivante

$$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{3}{2}c^2 \qquad (②)$$

**3.** À partir des relations (**??**) et (**??**) donner la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{ICA}\right)$. Conclure.

### Exercice 3 Droites perpendiculaires

Soit ABCD un carré de côté 1. On munit le plan du repère orthonormé $\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$.
Le point E est extérieur au carré tel que le triangle DEC est équilatéral.
Le point F est extérieur au carré tel que le triangle BFC est équilatéral.
On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].
L'objectif de cet exercice est de prouver que les droites (AE) et (DF) sont perpendiculaires.




**1.** Donner les coordonnées des points A, D, I et J.

**2.** Démontrer que $EJ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**3.** En déduire les coordonnées du point E. Donner ensuite celles du point F.

**4.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}$.

**5.** conclure.

## Exercice 4 — Géométrie du triangle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

**1.** Calculer la longueur BC.

**2.** Donner, à un degré près, la mesure de $\widehat{ABC}$.

## Exercice 5 — Équations de cercles

Soit $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé. Donner une équation du cercle :

**1.** de centre $\Omega(-1 ; 0)$ et de rayon 3 ;

**2.** de centre $\Omega(2 ; -1)$ et passant par le point $A(6 ; -4)$.

## Exercice 6 — Reconnaître une équation de cercle

Soit $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé.
Pour chacune des équations suivantes, dire s'il s'agit d'une équation d'un cercle et si oui, préciser le rayon ainsi que les coordonnées du centre de ce cercle.

**1.** $x^2 + y^2 + 3x - 4y - \dfrac{11}{4} = 0$

**2.** $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

**3.** $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$

## Exercice 7 — Équation de cercle

Soit $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé.
On considère les points A et B de coordonnées respectives $(0 ; -2)$ et $(-6 ; 0)$.

**1.** Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].

**2.** Montrer que l'équation obtenue peut se mettre sous la forme $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 10$.

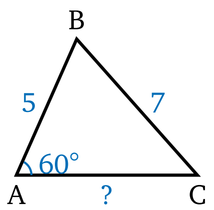
**3.** En déduire les coordonnées du centre $\Omega$ du cercle $\mathscr{C}$ ainsi que son rayon.

## Exercice 8 — Calcul de longueurs

On considère le triangle ABC ci-contre.

**1.** Calculer la longueur AC.

**2.** Donner, au degré près, une mesure de chacun des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.




## Exercice 9 — Condition d'orthogonalité de deux droites du plan

On se place dans un repère orthonormé et on considère deux droites du plan d'équations cartésienne :

$$d : ax + by + c = 0 \qquad \text{et} \qquad d' : a'x + b'y + c' = 0.$$

**1.** Prouver que les droites $d$ et $d'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

**2.** Soient $D$ et $D'$ deux droites d'équations réduites :

$$D : y = mx + p \qquad \text{et} \qquad D' : y = m'x + p'.$$

**3.** Trouver une condition d'orthogonalité des deux droites $D$ et $D'$.

## Exercice 10 Transformation d'une expression

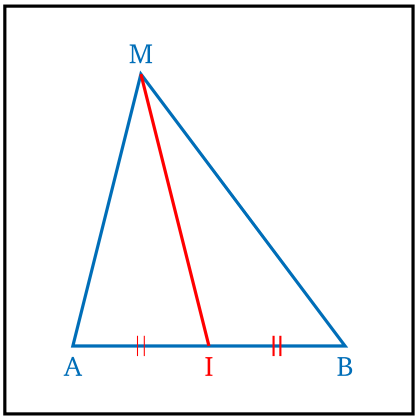
### Partie A

Soient A et B deux points distincts du plan. On note I le milieu du segment [AB].

**1.** Montrer que, pour tout point M du plan, on a l'égalité suivante

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2.$$

(On pourra décomposer $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en introduisant le point I)




**2.** En déduire que l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].

### Partie B

On suppose dans cette question que $AB=6$ et on cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=16$.

**1.** Montrer que

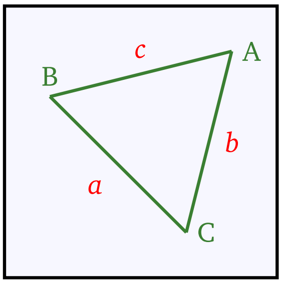
$$M\in\mathscr{E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad MI^2=25.$$

**2.** En déduire précisément l'ensemble $\mathscr{E}$.

## Exercice 11 Formule de Héron

Soit ABC un triangle quelconque. On pose

- $a=BC$
- $b=AC$
- $c=AB$
- $\widehat{BAC}=\hat{A}$
- $\widehat{ABC}=\hat{B}$
- $\widehat{ACB}=\hat{C}$




De plus S désignera l'aire du triangle ABC et $p$ son demi-périmètre, c'est-à-dire $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

L'objectif de cet exercice est de prouver la formule de Héron qui permet de calculer l'aire d'un triangle sans utiliser de hauteur.
Héron d'Alexandrie est un mathématicien et ingénieur grec du premier siècle après J.-C. On lui doit la fameuse formule suivante [1]

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**1.** (a) Montrer que $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\left(\hat{C}\right)$.

**Indication :** on pourra considérer le point H, projection orthogonale du point A sur la droite (BC). On posera alors $AH=h$.

(b) Exprimer $\cos\left(\hat{C}\right)$ en fonction des réels $a$, $b$ et $c$.

1. Cette formule était en réalité déjà connue du grand mathématicien Archimède (né à Syracuse vers 287 av. J.-C. et mort en cette même ville en 212 av. J.-C.

(c) Montrer que

$$\sin\left(\hat{C}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\hat{C}\right)}.$$

(d) Démontrer que

$$16S^2 = 4a^2b^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2.$$

(e) En déduire la formule de Héron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**2.** (a) Calculer de deux manières différentes l'aire d'un triangle dont les longueurs des côtés sont $3, 4$ et $5$.

(b) Calculer l'aire d'un triangle dont les longueurs des côtés sont $13, 14$ et $15$.

## 2. Le produit scalaire dans l'espace

### Exercice 12 — Calcul du produit scalaire dans un cube

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre d'arête 1.

**1.** Calculer les produits scalaires suivants :

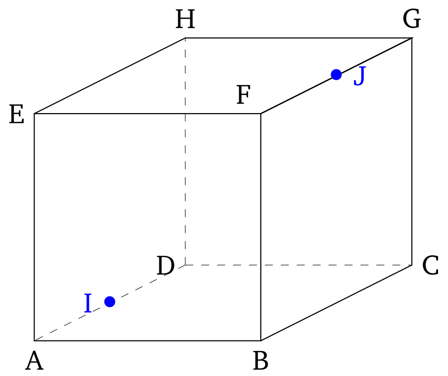
(a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GH}$ (c) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{GE}$

(b) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG}$ (d) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$

**2.** Montrer que $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

**3.** Déterminer les coordonnées des points A, I, J, B et C dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.

**4.** Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.




### Exercice 13 — Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points suivants :

$$A(1\,;\,0\,;\,1)\,,\ B(2\,;\,-1\,;\,3)\,,\ C(4\,;\,1\,;\,5)\,,\ I(5\,;\,2\,;\,-3)\text{ et }J(8\,;\,1\,;\,-5).$$

**1.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

**2.** Prouver que la droite (IJ) est orthogonale au plan (ABC).

### Exercice 14 — Vecteur normal à un plan

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$ n repère orthonormé de l'espace. On considère les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\text{ et }\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}.$$

**1.** Montrer que le vecteur $\vec{u}$ n'est pas normal au plan (ABC).

**2.** Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC).

## Exercice 15 Étude de configurations

Dans le repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points suivants :

$$A(4 ; -4 ; -2), B(0 ; 3 ; 2), C(8 ; -1 ; 3), D(-1 ; 2 ; -2), E(-1 ; 5 ; 2), F(-1 ; -2 ; 1).$$

**1.** Déterminer la nature du triangle ABC.

**2.** Donner une valeur approchée, au degré près, de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

**3.** Déterminer la nature du triangle DEF.

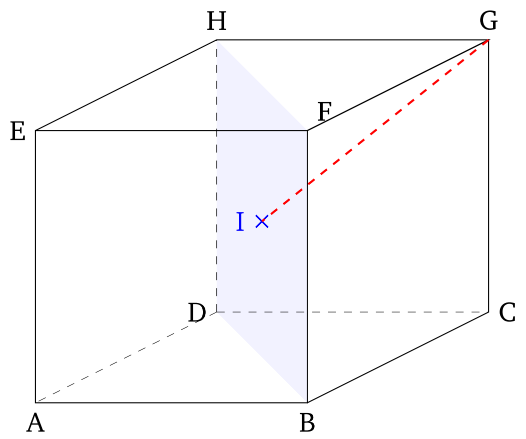
## Exercice 16 Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

On considère deux points distincts de l'espace A et B.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
**Indication** : on pourra décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en introduisant le point I, milieu du segment [AB].

## Exercice 17 Distance d'un point à un plan

On considère le cube ci-contre ABCDEFGH d'arête 1.

L'objectif de cet exercice est de calculer la distance du point G au plan (HDB).
L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
$I(x ; y ; z)$ désigne le projeté orthogonal du point G sur le plan (HDB).




**1.** Donner les coordonnées des points B, D, H et G.

**2.** Exprimer en fonction des coordonnées du point I, les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{HD} ; \overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{BI}.$$

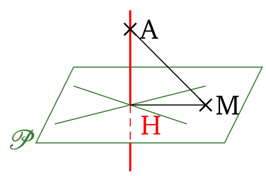
**3.** En déduire les coordonnées du point I.

**4.** Calculer la distance du point G au plan (HDB).

## Exercice 18 Démonstration

Démontrer la propriété suivante :

**Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$, noté H, est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de A.**
On pourra raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe un point M du plan $\mathscr{P}$ **distinct** de H tel que $AM \leq AH$.




## Exercice 19 Équation cartésienne d'un plan

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(-1 ; 1 ; -2)$, $B\left(\frac{1}{2} ; -4 ; -1\right)$ et $C(0 ; 3 ; 2)$.

On se donne également un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

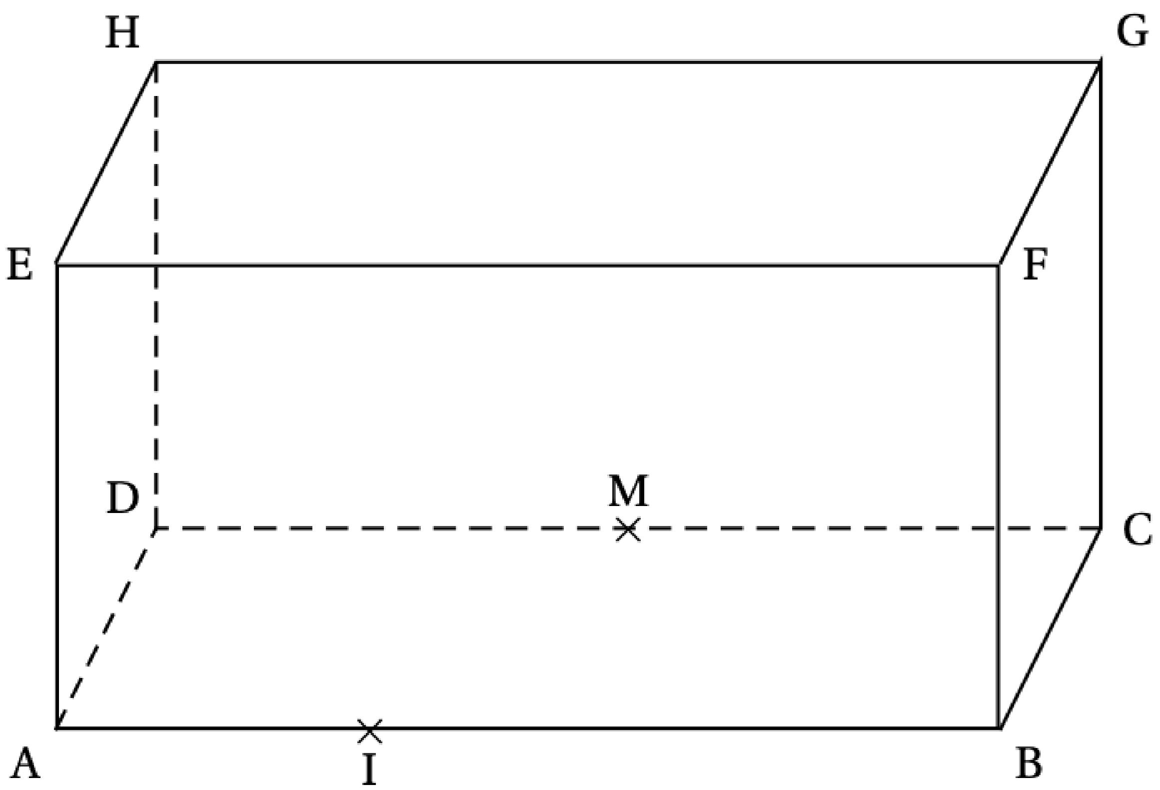
**1.** Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

**2.** Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}'$ passant par les points A, B et C.

## 3. Quelques sujets de Bac

**Exercice 20** **Amérique du Nord 2024**

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.




On considère le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

**1.** Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

**2.** (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

(c) Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

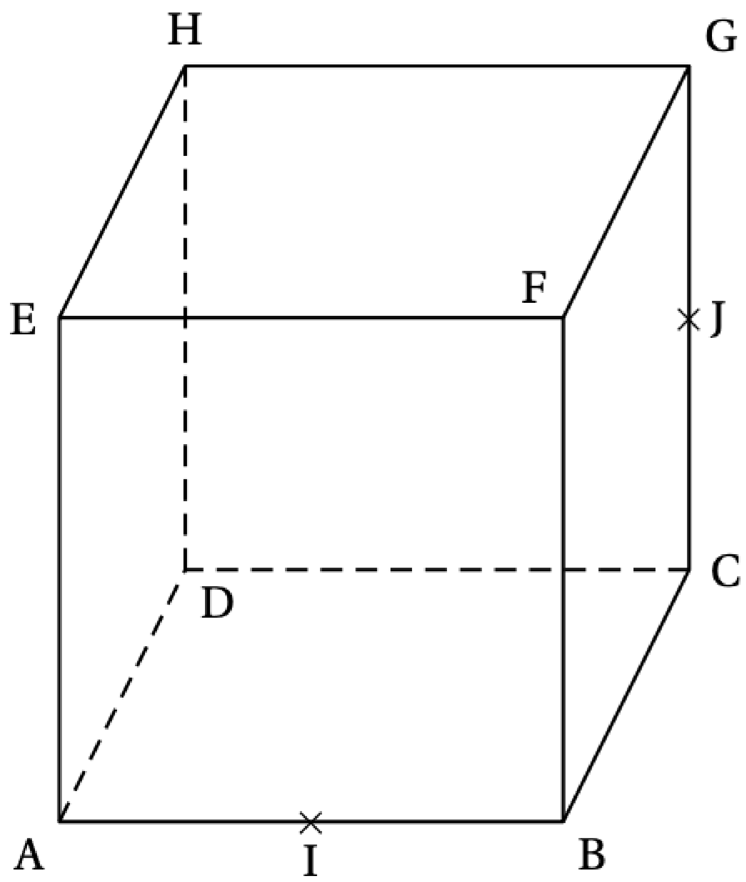
**3.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

**4.** On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
Déterminer les coordonnées du point N.

**5.** Le point R de coordonnées $\left(3\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

## Exercice 21 Centres étrangers 2024

Le cube ABCDEFGH a pour arête 1 cm.
Le point I est le milieu du segment [AB] et le point J est le milieu du segment [CG].




On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

**1.** Donner les coordonnées des points I et J.

**2.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

**3.** Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x-2y+z+1=0$.

**4.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).

**5.** (a) On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI). Calculer ses coordonnées.

(b) Montrer que le volume de la pyramide EFHI est $\dfrac{1}{6}$ cm$^3$.
*On pourra utiliser le point* L*, milieu du segment* [EF]*. On admet que ce point est le projeté orthogonal du point* I *sur le plan* (EFH).

(c) Déduire des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

## Exercice 22 Asie 2024

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan $(P)$ d'équation :

$$(P): \quad 2x+2y-3z+1=0.$$

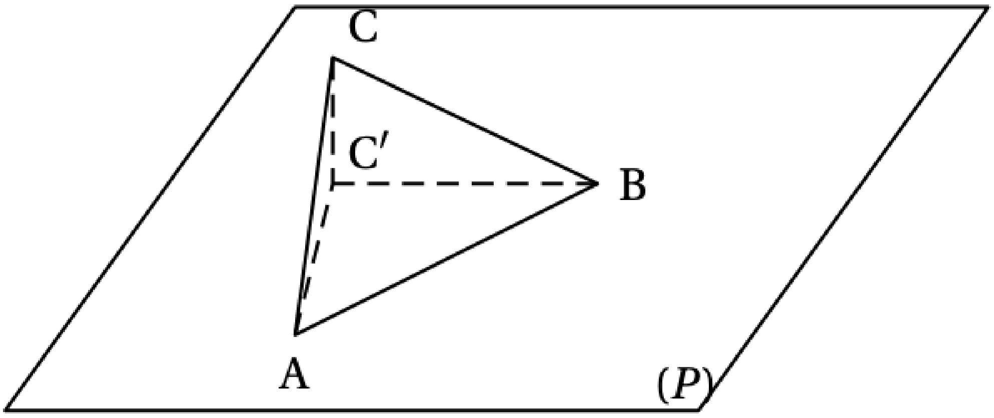
On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A(1\,;0\,;1)\ ,\ B(2\,;-1\,;1) \text{ et } C(-4\,;-6\,;5)\,.$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

**Partie A**

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan $(P)$.
2. Montrer que le point $C'(0\ ;\ -2\ ;\ -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan $(P)$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions
$$\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$$
Déterminer les coordonnées du point H.




**Partie B**

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{HC}\right\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

**Partie C**

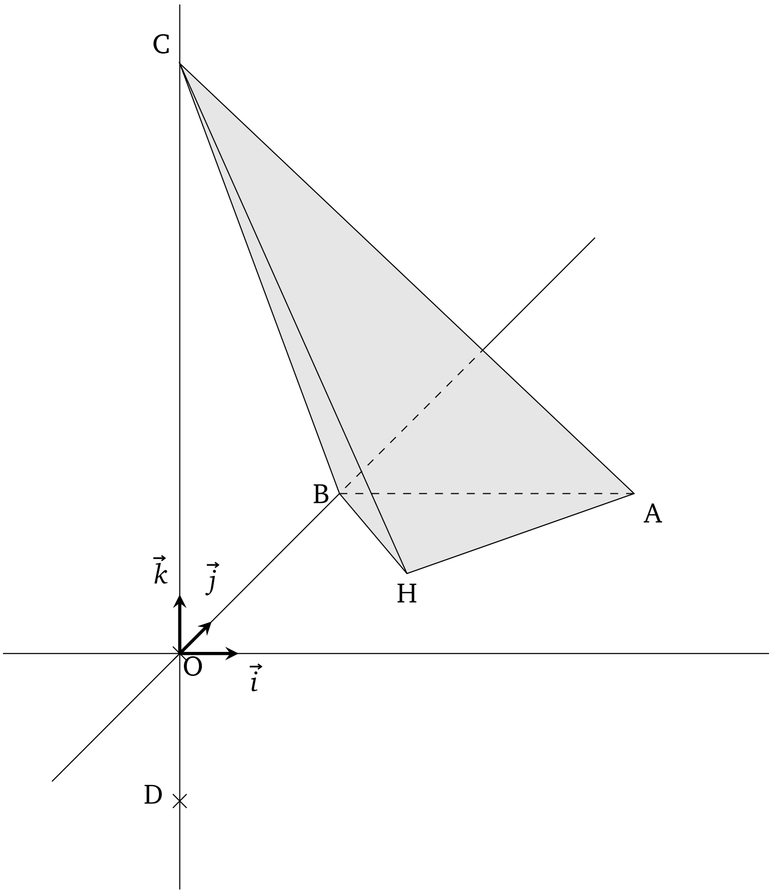
On admet que $HC' = \sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. (a) Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.
   (b) Calculer $S'$ l'aire du triangle $ABC'$, on donnera la valeur exacte.
   (c) Donner une relation entre S, $S'$ et $\cos(\alpha)$.

## Exercice 23 Métropole 2024

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(5\ ;\ 5\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 5\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 10)$ et $D\left(0\ ;\ 0\ ;\ -\dfrac{5}{2}\right)$.




**1.** (a) Montrer que $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

(b) En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

**2.** On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

(a) On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H.
Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ 0\right)$.

(b) Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

**3.** (a) Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

(b) En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

**4.** (a) Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

(b) En déduire le volume du tétraèdre ABCH.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h, \qquad \text{où } \mathscr{B} \text{ est l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur relative à cette base.}$$

**5.** On admet que le triangle ABC est rectangle en B.
Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

## Exercice 24 Polynésie 2024

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.

Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{i},~\vec{j},~\vec{k}\right)$ dont l'unité est la centaine de mètres.

La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées $(2~;~5~;~1)$.

On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathscr{P}$.

Trois drones sont positionnés aux points $A(-1~;~-1~;~17)$, $B(4~;~-2~;~4)$ et $C(1~;~-3~;~7)$.

**1.** Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

**2.** (a) Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

(b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $2x-3y+z-18=0$.

**3.** Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la droite $d$ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$d~:~\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 3t+2\\ y &=& t+5\\ z &=& 4t+1\end{array}\right., \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

(a) Déterminer un vecteur directeur de la droite $d$.

(b) Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathscr{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite $d$ avec le plan $\mathscr{P}$.

**4.** Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite $\Delta$ qui passe par le point $D$ et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathscr{P}$, soit à l'intersection entre la droite $\Delta$ et le plan $\mathscr{P}$. On admet que le point $F(6~;~-1~;~3)$ correspond à cet emplacement.

Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

**5.** L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D.

Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à $18{,}6$ m.s$^{-1}$, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?

## Exercice 25 Métropole 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{i},~\vec{j},~\vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1~;~1~;~3)$ ;
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& 2-t,\\ z &=& 2+2t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}.$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

**1.** (a) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

(b) Montrer que le point $B(-1~;~3~;~0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

(c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}$.

**2.** On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

(a) Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x-y+2z-3=0$.

(b) En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

(c) Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

**3.** Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point B$(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

(a) Justifier qu'il existe un nombre réel $k$ tel que $\overrightarrow{\text{HB}} = k\vec{u}$.

(b) Montrer que

$$k = \frac{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

(c) Calculer la valeur du nombre réel $k$ et retrouver les coordonnées du point H.

**4.** On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

Calculer l'aire du triangle ACH.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et $h$ la hauteur relative à cette base.