

Fonctions sinus et cosinus

Les objectifs du chapitre

Contenu

- Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives

Capacités attendues

- Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi ; \pi]$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum

Approfondissement possible

- Fonction tangente

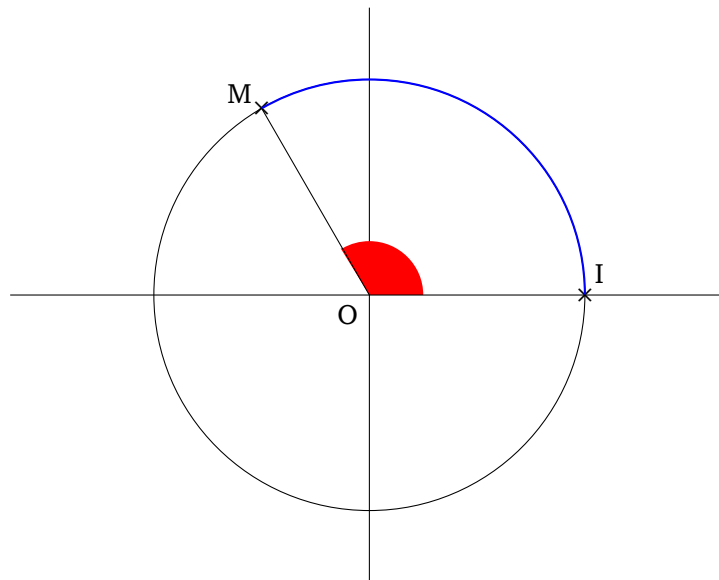
I Le cours

1. Le cercle trigonométrique

Définition 1 : le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique, noté \mathcal{C} , est le cercle de centre O et de rayon $r = 1$.
 Son périmètre est donc par définition $2\pi \times r = 2\pi \times 1 = 2\pi$.

► On note x la longueur de l'arc de cercle \widehat{IM} . On dit que l'angle \widehat{IOM} mesure x radians.



- On a ainsi défini une autre unité pour mesurer les angles : le **radian**, noté rad.
- En remarquant qu'un angle plat mesure 180° ou $\pi \text{ rad}$ (un demi-tour du cercle trigonométrique), voici comment on passe des degrés aux radians

$\frac{\text{mesure de l'angle en degrés}}{180} = \frac{\text{mesure de l'angle en radians}}{\pi}$
--

2. Enroulement de la droite des réels

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé.

On considère les points I et J définis par $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.

On note \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O.

Soit \mathcal{D} la tangente en I au cercle \mathcal{C} d'équation $x = 1$. On munit la droite \mathcal{D} du repère $(I ; \vec{j})$.

On identifie ainsi l'ensemble des points de la droite \mathcal{D} et l'ensemble des nombres réels.

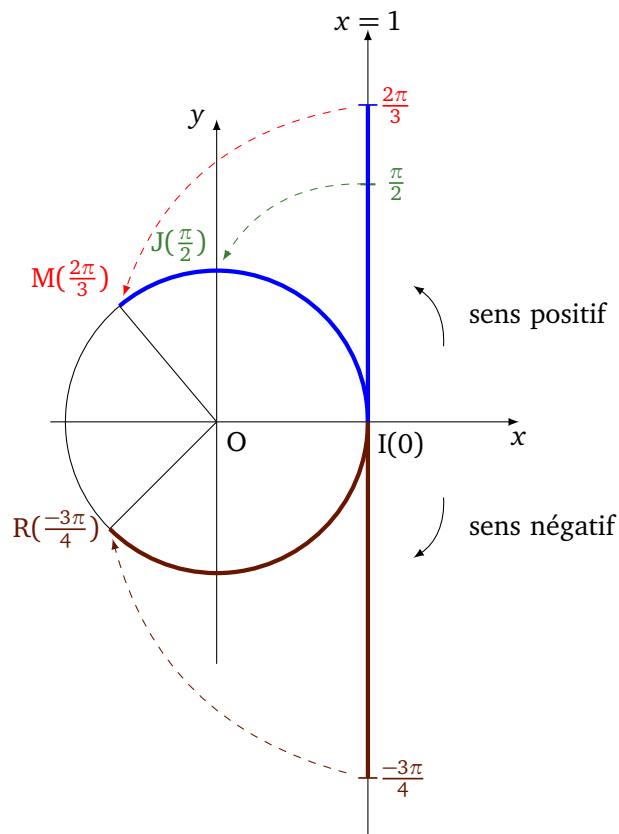
On enroule la droite des réels autour du cercle trigonométrique \mathcal{C} à partir de leur origine commune I, \mathbb{R}_+ s'enroulant dans le sens positif, \mathbb{R}_- dans le sens négatif.

Ainsi, à chaque nombre réel x appartenant à \mathcal{D} est associé un point M de \mathcal{C} qu'on note $M(x)$.

Le réel x représente également la mesure (en radian) de \widehat{IM} .

Ainsi, d'après le schéma ci-dessous

- Au nombre $\frac{\pi}{2}$ on associe le point $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- Au nombre $\frac{2\pi}{3}$ on associe le point $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
- Au nombre $\frac{-3\pi}{4}$ on associe le point $R\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$.



Dans ce procédé, à chaque nombre réel x de la droite \mathcal{D} , est associé **un unique point** M du cercle \mathcal{C} .

On a vu qu'au nombre $\frac{\pi}{2}$ de la droite \mathcal{D} , on associe l'**unique** point $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Cependant la réciproque est fautive : chaque point M de \mathcal{C} est l'image d'**une infinité** de nombres réels.

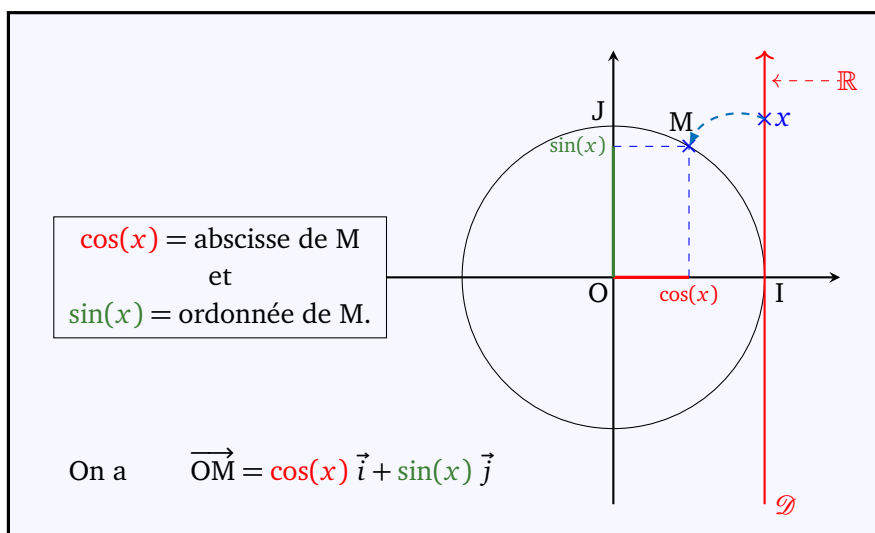
Par exemple $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3} - 2\pi = \frac{-4\pi}{3}$ sont tous associés au même point $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Ces trois nombres sont des mesures différentes d'un même angle. Comme 2π représente un tour complet du cercle \mathcal{C} , on en déduit que

un angle x a une infinité de mesures qui sont données par : $x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

3. Sinus et cosinus d'un nombre réel

Dans l'enroulement de la droite \mathcal{D} sur le cercle \mathcal{C} , à tout nombre réel x de \mathcal{D} , correspond un unique point M de \mathcal{C} . Pour tout réel x , on définit les nombres $\sin(x)$ et $\cos(x)$ comme suit :

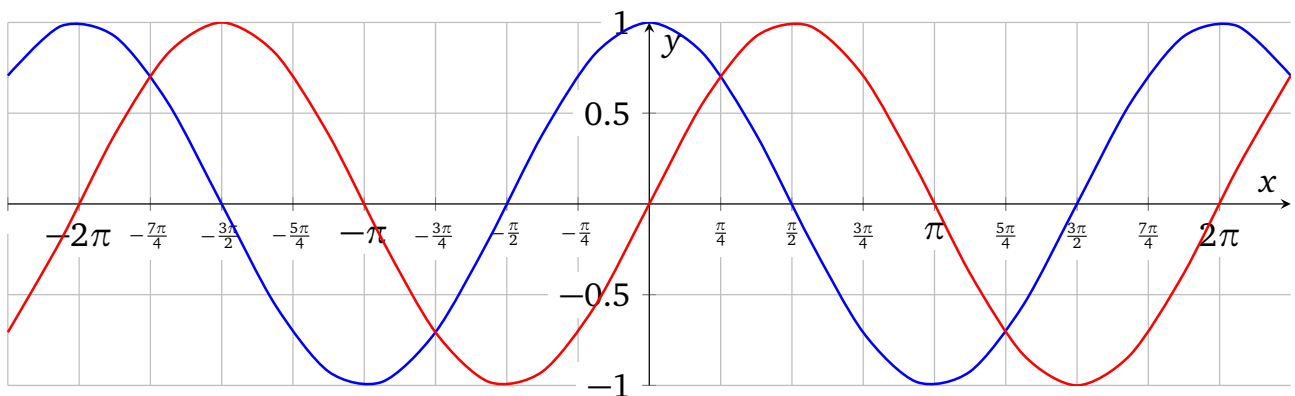


4. Propriétés de la fonction cosinus

- La fonction **cosinus**, notée \cos , est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Cette fonction est **paire** car elle vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.
Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction \cos est **2π -périodique**. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

5. Propriétés de la fonction sinus

- La fonction **sinus**, notée \sin , est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Cette fonction est **impaire** car elle vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.
Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- La fonction \sin est **2π -périodique**. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.



6. Variations des fonctions cosinus et sinus

- La fonction \cos est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- La fonction \sin est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.
- Les fonctions \cos et \sin sont 2π -périodiques, il suffit d'étudier leurs variations sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi ; \pi]$.
De plus, leurs courbes représentatives sont symétriques, il suffit de restreindre l'étude à l'intervalle $[0 ; \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations de \cos	1	0	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations de \sin	0	1	0

7. Propriétés remarquables

Pour tout nombre réel x , on a

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

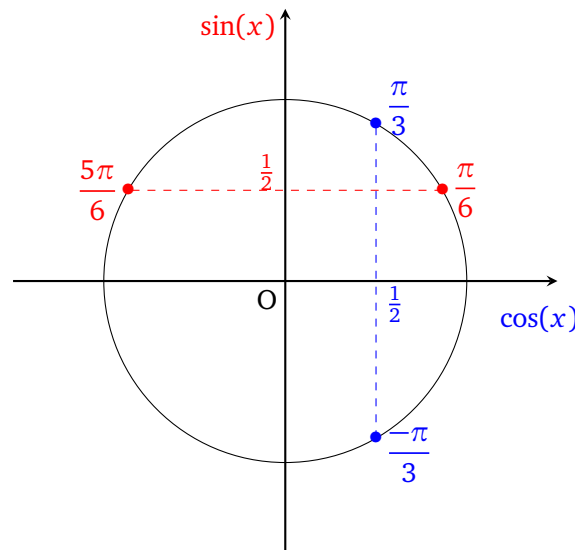
8. Limites remarquables

Grâce aux limites des taux d'accroissement en 0 des fonctions cos et sin, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

9. Équations trigonométriques sur $] -\pi ; \pi]$

- L'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ d'inconnue x admet pour solutions sur $] -\pi ; \pi]$ les nombres $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ comme le montre le schéma ci-dessous.
 On note $S = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$.
- L'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ admet pour solutions sur $] -\pi ; \pi]$ les nombres $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.
 On note $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right\}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. On peut résoudre l'équation $\cos(x) = a$ à l'aide la calculatrice. Il suffit de taper $\cos^{-1}(a)$ pour obtenir la solution positive de cette équation, c'est-à-dire on obtient le nombre $x \in [0 ; \pi]$ tel que $\cos(x) = a$.

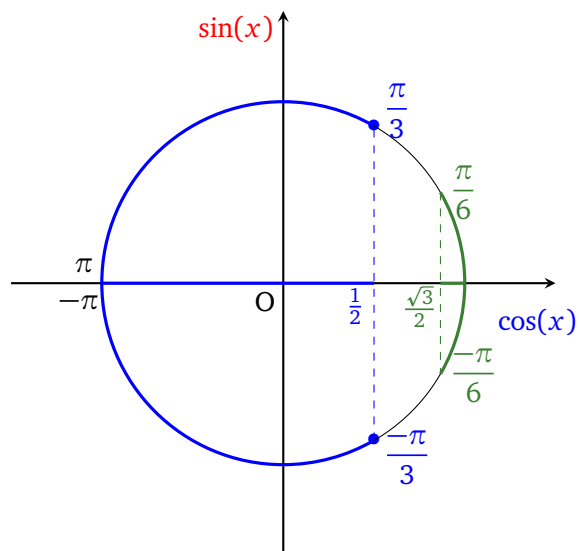


10. Inéquations trigonométriques sur $] -\pi ; \pi]$

- L'inéquation $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ d'inconnue x admet pour solutions sur $] -\pi ; \pi]$ tous les nombres appartenant à $\left] -\pi ; -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \pi \right]$ comme le montre le schéma ci-dessous. On note

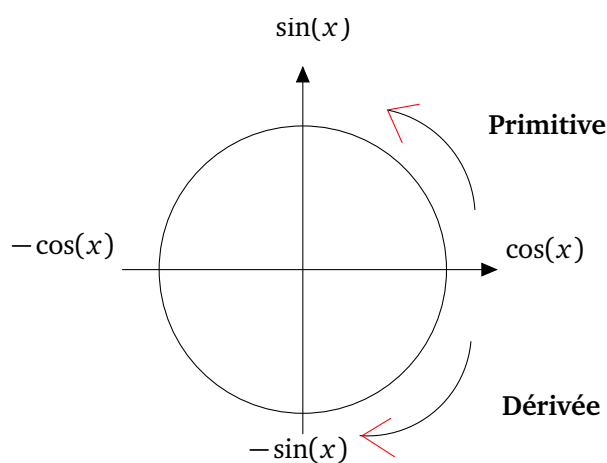
$$S = \left] -\pi ; -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \pi \right].$$
- L'inéquation $\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ admet pour solutions sur $] -\pi ; \pi]$ les nombres appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} \right[$. On note

$$S = \left] -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} \right[.$$



11. Primitives de fonctions trigonométriques

- D'après le schéma ci-dessous, $x \mapsto -\cos(x)$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.
- La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.



II Les exercices

Exercice 1 Mesure principale d'un angle

Soit α un angle dont une mesure est $\frac{53\pi}{7}$.

- Donner la mesure de α comprise entre 0 et 2π .
- Définition : On appelle **mesure principale** d'un angle sa mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.
Donner la mesure principale de l'angle α .

Exercice 2 Sinus et cosinus d'angles associés

Simplifier les expressions suivantes en utilisant les formules des angles associés.

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\cos(2\pi - x)$. | 4. $\sin(3\pi + x)$. | 7. $\cos(x + \pi)$. |
| 2. $\cos(\pi - x)$. | 5. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$. | 8. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. |
| 3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. | 6. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. | 9. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. |

Exercice 3 Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{2}\cos(x)\sin(x)$.

- Prouver que la fonction f est impaire.
- Montrer que f est π -périodique.
- Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
On admettra que $\cos^2(x) \geq \sin^2(x)$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et $\cos^2(x) \leq \sin^2(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right]$.
- En déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4 Équations trigonométriques

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes.

- | | | |
|---------------------------|---|--|
| 1. $2\cos(x) - 1 = 0$ | 3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ | 5. $2\cos^2(x) - \cos(x) = 1$ |
| 2. $2\sin^2(x) = \sin(x)$ | 4. $\cos(x)\sin(x) = 0$ | 6. $\frac{2 - \sin(x)}{1 + \sin^2(x)} = 2$ |

Exercice 5 Inéquations trigonométriques

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ les inéquations suivantes.

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 3. $\sqrt{2}\cos(x) + 1 \geq 0$ | 5. $\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 < 0$ |
| 2. $\cos(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 4. $\cos(x + \pi) \leq \frac{1}{2}$ | 6. $\cos(x)(2\sin x - 1) > 0$ |

Exercice 6 Limites de fonctions trigonométriques

Déterminer chacune des limites suivantes.

- 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (3 + \cos(x))$
- 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}$
- 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - \sin(x)}{3x^2 + 1}$
- 4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Exercice 7 Relations trigonométriques

On considère un nombre réel a tel que $\sin(a) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

- 1. Quelles sont les valeurs possibles de $\cos a$?
- 2. En supposant à présent que $a \in \left] \frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, donner sous forme de fraction la valeur de $\tan a = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$.

Exercice 8 Dérivation de fonctions trigonométriques

Déterminer une expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur un intervalle I .

- 1. $f(x) = \sin(\sqrt{x+1})$; $I =]-1 ; +\infty[$
- 2. $g(x) = \frac{\cos(2x)}{2 + \sin(2x)}$; $I = \mathbb{R}$
- 3. $h(x) = \cos(2x - 3) \sin(5x + 7)$; $I = \mathbb{R}$
- 4. $i(x) = \ln\left(\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) + 1\right)$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 9 Primitives de fonctions trigonométriques

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur I de chacun des fonctions suivantes.

- 1. $g_1(x) = 7 \cos(7x)$; $I = \mathbb{R}$
- 2. $g_2(x) = -3 \sin(2x)$; $I = \mathbb{R}$
- 3. $g_3(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$; $I = \left] \frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$
- 4. $g_4(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$; $I = \mathbb{R}$
- 5. $g_5(x) = 5 \cos(2x) - 3 \sin(4x)$; $I = \mathbb{R}$
- 6. $g_6(x) = \tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $I = \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$

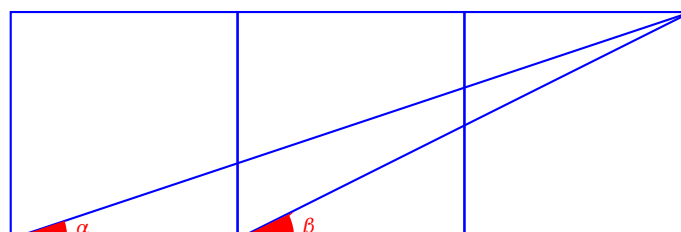
Exercice 10 Produit et somme

Soit $a \in \left[0 ; \frac{\pi}{4} \right]$ tel que $\sin(a) \times \cos(a) = \frac{2}{5}$.

- 1. Montrer que $\sin(a) + \cos(a) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.
- 2. Que vaut $\sin(a) - \cos(a)$?

Exercice 11 Addition d'angles

Déterminer la somme des angles α et β , construits à partir des trois carrés disposés côte à côte ci-dessous. On suppose que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ et $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}$.



On pourra utiliser la relation suivante, valable pour tous réels a et b :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Exercice 12 Calcul de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Soit $(O ; I, J)$ un repère orthonormé direct du plan. \mathcal{C} représente le cercle trigonométrique. On considère deux points A et B de \mathcal{C} associés respectivement aux réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ par enroulement de la droite réelle autour de \mathcal{C} (voir la figure ci-dessous).

1. Montrer que

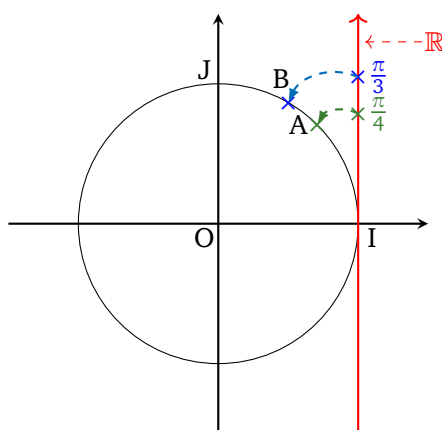
$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2. Donner les coordonnées des points A et B dans le repère $(O ; I, J)$.

3. En calculant de deux manières le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4. En déduire que

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$



Remarque : on peut de manière similaire montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Histoire des maths

Hugo Duminil-Copin , né le 26 août 1985, est un mathématicien français, grand spécialiste de la théorie des probabilités et de la physique statistique.

Après des études en classes préparatoires au Lycée Louis-Le-Grand, Hugo Duminil-Copin intègre l'École Normale Supérieure d'Ulm où il s'épanouit intellectuellement. Il obtient en 2011 son doctorat à l'université de Genève.

Il reçoit le 5 juillet 2022 la médaille Fields, plus haute distinction en mathématiques, pour l'ensemble de ses travaux.

Il démontre pendant sa thèse de doctorat, sous la direction du médaillé Fields Stanislav Smirnov, que la constante de connectivité du réseau hexagonal est égale à

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$



Exercice 13 Intégration de fonctions trigonométriques

Calculer chacune des intégrales suivantes.

$$1. I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 + 3 \cos(x)) dx$$

$$4. I_4 = \int_0^{\pi} x \sin(x) dx$$

$$2. I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx$$

$$5. I_5 = \int_0^{\pi} x^2 \cos(x) dx$$

$$3. I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$$

$$6. I_6 = \int_0^{\pi} x \cos^2(x) dx + \int_0^{\pi} x \sin^2(x) dx$$

Exercice 14 Suite récurrente et point fixe

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \sin(x)$.

1. Étudier les variations de f sur son domaine de définition.
2. Montrer que l'équation $\sin(x) = x$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Étudier les variations de la suite (u_n) .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$.
3. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

III Corrigé

Exercice 1 Mesure principale d'un angle

1. On a

$$\frac{53\pi}{7} = \frac{49\pi + 4\pi}{7} = 6\pi + \pi + \frac{4\pi}{7} = 6\pi + \frac{11\pi}{7}.$$

Comme $6\pi = 3 \times 2\pi$ représente trois tours entiers du cercle trigonométrique, $\frac{53\pi}{7}$ et $\frac{11\pi}{7}$ sont des mesures d'un même angle. De plus, $\frac{11\pi}{7} \in [0 ; 2\pi[$, d'où

la mesure de $\frac{53\pi}{7}$ entre 0 et 2π est $\frac{11\pi}{7}$.

2. On a vu que $\frac{11\pi}{7}$ est la mesure comprise entre 0 et 2π de l'angle α . Il nous faut donc faire un tour en arrière supplémentaire sur le cercle trigonométrique pour obtenir la mesure principale de $\frac{53\pi}{7}$. Or

$$\frac{11\pi}{7} - 2\pi = \frac{11\pi - 14\pi}{7} = \frac{-3\pi}{7}.$$

Et comme $\frac{-3\pi}{7} \in]-\pi ; \pi]$, on conclut que

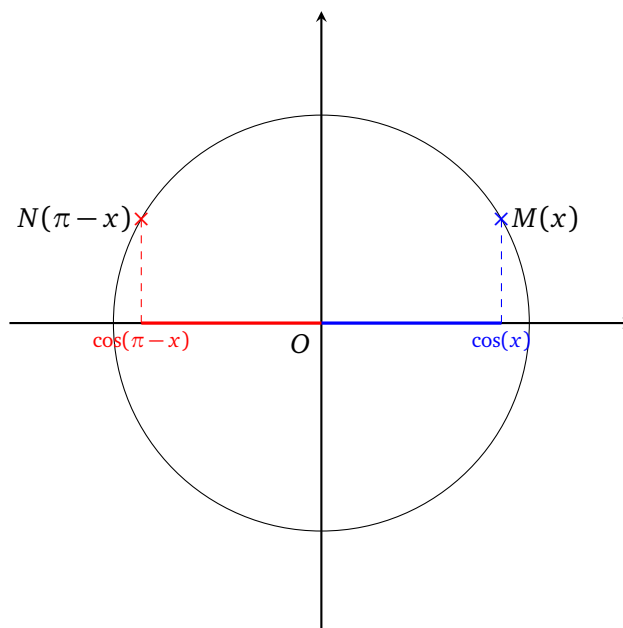
la mesure principale de $\frac{53\pi}{7}$ est $\frac{-3\pi}{7}$.

Exercice 2 Sinus et cosinus d'angles associés

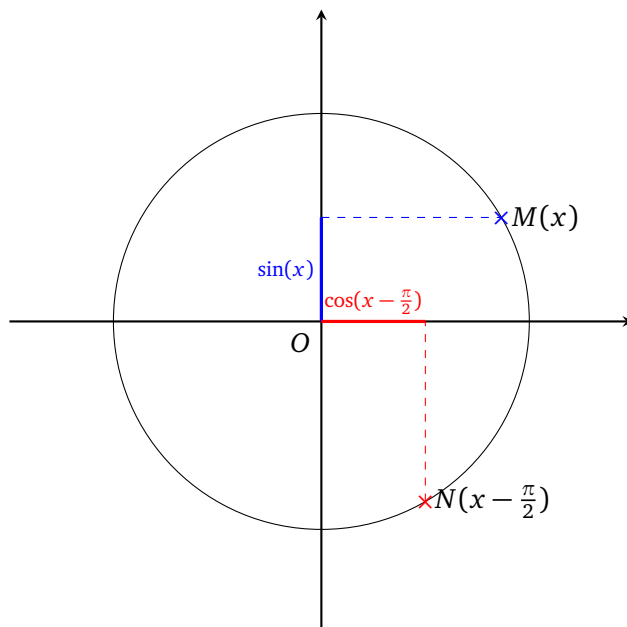
Pour tout nombre réel x , on a

1. $\cos(2\pi - x) \underset{\text{par périodicité}}{=} \cos(-x) \underset{\text{par parité}}{=} \cos x.$

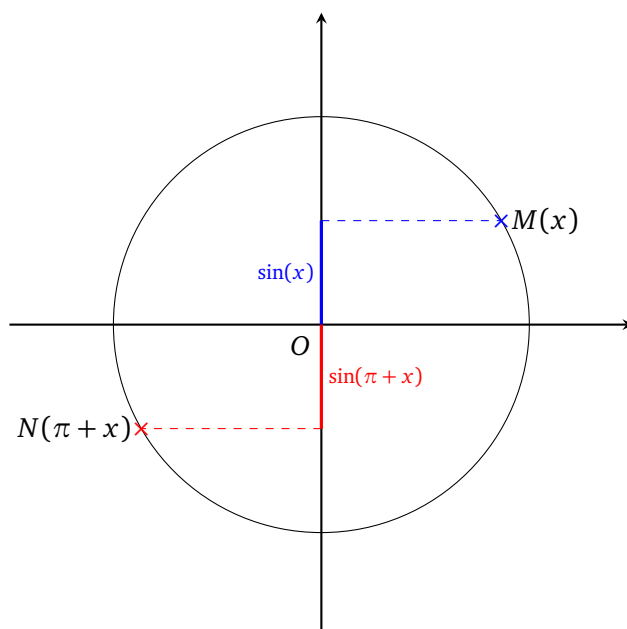
2. $\cos(\pi - x) = -\cos x$, comme le montre le schéma suivant



3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, comme le montre le schéma suivant



4. $\sin(3\pi + x) \stackrel{\text{par périodicité}}{=} \sin(\pi + x) = -\sin x$, comme le montre le schéma suivant



5. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x.$

6. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \stackrel{\text{par parité}}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$

7. $\cos(x + \pi) = -\cos x.$

8. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$

9. $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$

Exercice 3 Étude d'une fonction

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto f(-x)$ est bien définie et on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{2} \cos(-x) \sin(-x) \\ &= \sqrt{2} \times \cos x \times (-\sin x) \\ &= -\sqrt{2} \cos x \sin x = -f(x). \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction f est impaire.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \pi \in \mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto f(x + \pi)$ est bien définie et on a

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \sqrt{2} \cos(x + \pi) \sin(x + \pi) \\ &= \sqrt{2} \times (-\cos x) \times (-\sin x) \\ &= \sqrt{2} \cos x \sin x = f(x). \end{aligned}$$

Ainsi f est π -périodique.

3. La fonction f est dérivable sur $I = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in I$,

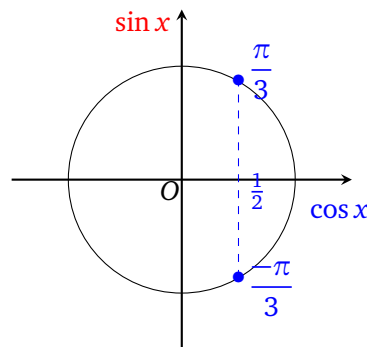
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2} (-\sin x \sin x + \cos x \cos x) \\ &= \sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x). \end{aligned}$$

D'après l'indication donné dans l'énoncé, f est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. La fonction f est impaire, sa courbe représentative dans un repère est donc symétrique par rapport à l'origine. Donc ses variations s'inversent sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2} ; 0\right]$.

Exercice 4 Équations trigonométriques

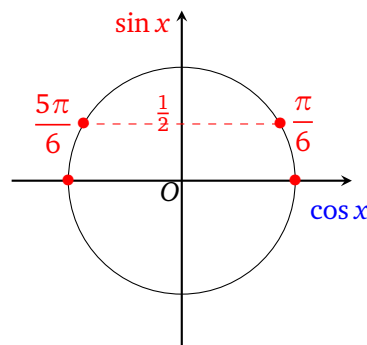
1. On a $2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.



Donc dans $]-\pi ; \pi]$, l'équation de départ admet deux solutions : $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

2. $2 \sin^2 x = \sin x \Leftrightarrow \sin x (2 \sin x - 1) = 0$.

Il s'agit donc d'une équation produit nul et on a $\sin x = 0$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$



Les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ de l'équation sont

$$S = \left\{0 ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} ; \pi\right\}.$$

3. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x.$$

Ainsi l'équation de départ est équivalente à

$$\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ dont les solutions sur }]-\pi ; \pi] \text{ sont } S = \left\{ \frac{-3\pi}{4} ; \frac{-\pi}{4} \right\}.$$

4. $\cos x \sin x = 0$ est une équation produit nul et

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{2} ; 0 ; \frac{\pi}{2} ; \pi \right\}.$$

5. On a $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

On pose $X = \cos x$. On a donc $-1 \leq X \leq 1$ et $2X^2 - X - 1 = 0$ dont les solutions sont données par

$$X_1 = \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1+3}{4} = 1.$$

Autrement dit $\cos x = \frac{-1}{2}$ ou $\cos x = 1$.

Ainsi l'équation de départ admet pour solutions sur $]-\pi ; \pi]$: $S = \left\{ \frac{-2\pi}{3} ; 0 ; \frac{2\pi}{3} \right\}$.

6. Cette équation est bien définie sur $]-\pi ; \pi]$ car $1 + \sin^2 x \neq 0$ sur cet intervalle. De plus

$$\frac{2 - \sin x}{1 + \sin^2 x} = 2 \iff 2 - \sin x = 2 + 2 \sin^2 x \iff \sin x (2 \sin x + 1) = 0.$$

Donc $\sin x = 0$ ou $\sin x = \frac{-1}{2}$. Par conséquent

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{6} ; 0 ; \frac{5\pi}{6} ; \pi \right\}.$$

Exercice 5 Inéquations trigonométriques

1. L'ensemble des solutions sur $]-\pi ; \pi]$ de l'inéquation $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est

$$S = \left] -\pi ; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} ; \pi \right].$$

2. On a $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Ainsi

$$S = \left] -\pi ; \frac{-\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{\pi}{6} ; \pi \right[.$$

3. $\sqrt{2} \cos x + 1 \geq 0 \iff \cos x \geq \frac{-\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

$$\text{Ainsi } S = \left[\frac{-3\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right].$$

4. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$. On obtient donc l'inéquation

$$-\cos x \leq \frac{1}{2} \iff \cos x \geq \frac{-1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\text{Il en résulte que } S = \left] -\pi ; \frac{-2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi \right].$$

5. $\cos^2 x - 2 \cos x + 1 < 0 \iff \underbrace{(\cos x - 1)^2}_{\text{quantité positive}} < 0$.

Il s'ensuit que $S = \emptyset$.

6. Le tableau suivant résume l'étude des signes de $x \mapsto \cos x$ ainsi que $x \mapsto 2 \sin x - 1$:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	-	0	+	+	0	-
$2 \sin x - 1$	-	-	0	+	+	0
$P(x)$	+	0	-	0	+	0

Par conséquent

$$S =]-\pi ; \frac{-\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{5\pi}{6} ; \pi[.$$

Exercice 6 Limites de fonctions trigonométriques

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $2 \leq 3 + \cos x \leq 4$. Comme $e^x > 0$, on a $2e^x \leq e^x(3 + \cos x) \leq 4e^x$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$. Donc, par le théorème de comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(3 + \cos x) = +\infty$.

2. Pour $x \neq 0$, $\frac{-1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$.

3. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{5x^2 - \sin x}{3x^2 + 1} = \frac{x^2 \left(5 - \frac{\sin x}{x^2} \right)}{x^2 \left(3 + \frac{1}{x^2} \right)} \stackrel{(x^2 \neq 0)}{=} \frac{5 - \frac{\sin x}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}}$$

Or d'après la question précédente $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$, donc par opérations sur les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - \sin x}{3x^2 + 1} = \frac{5}{3}.$$

4. Pour tout réel $x \neq 0$, on a $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq 1$.

En multipliant cette double inégalité par $x^4 > 0$, on obtient $-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq x^4$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^4) = \lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$, donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

Exercice 7 Relations trigonométriques

1. On a pour tout a de \mathbb{R}

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2 a = 1 - \sin^2 a.$$

Et comme $-1 \leq \sin a \leq 1$, on a $0 \leq \sin^2 a \leq 1$ et donc $1 - \sin^2 a \geq 0$.

Ainsi

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} \quad \text{ou} \quad \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a}.$$

C'est-à-dire

$$\cos a = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} \quad \text{ou} \quad \cos a = -\sqrt{1 - \frac{5}{9}}.$$

On conclut que

$$\boxed{\cos a = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \cos a = \frac{-2}{3}.}$$

2. $a \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ entraîne que $\cos a > 0$ donc d'après ce qui précède $\cos a = \frac{2}{3}$.

Par définition de la fonction tangente, on a

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2}.$$

Il en résulte que

$$\boxed{\tan a = \frac{\sqrt{5}}{2}.}$$

Exercice 8 Dérivation de fonctions trigonométriques

1. On pose $u(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \in I$.

On a donc $f(x) = \sin(u(x))$ et donc

$$f'(x) = u'(x) \cos(u(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cos(\sqrt{x+1}).$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2 \sin(2x) [2 + \sin(2x)] - 2 \cos(2x) \cos(2x)}{[2 + \sin(2x)]^2} \\ &= \frac{-4 \sin(2x) - 2 [\sin^2(2x) + \cos^2(2x)]}{[2 + \sin(2x)]^2} \\ &= \frac{-2 [1 + 2 \sin(2x)]}{[2 + \sin(2x)]^2}. \end{aligned}$$

3. La fonction h est de la forme uv .

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = -2 \sin(2x - 3) \sin(5x + 7) + 5 \cos(2x - 3) \cos(5x + 7).$$

4. La fonction i est de la forme $\ln(u)$.

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$i'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{où} \quad u(x) = \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) + 1.$$

$$\text{Or } u'(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times \left(-\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right).$$

Ainsi

$$i'(x) = \frac{\frac{-2}{3} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) + 1}.$$

Exercice 9 Primitives de fonctions trigonométriques

1. La fonction $G_1 : x \mapsto \sin(7x)$ est une primitive de g_1 sur \mathbb{R} car $G_1' = g_1$.
2. La fonction G_2 définie sur \mathbb{R} par $G_2(x) = \frac{3}{2} \cos(2x)$ est une primitive sur \mathbb{R} de g_2 car $G_2' = g_2$.
3. Pour tout $x \in I = \left] \frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, on a $g_3(x) = -2 \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ où $u(x) = \cos x > 0$ sur I . Ainsi la fonction G_3 définie sur I par $G_3(x) = -2\sqrt{\cos x}$ est une primitive de g_3 sur I .
4. La fonction $G_4 : x \mapsto -\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ est une primitive sur \mathbb{R} de g_4 car $G_4' = g_4$.
5. La fonction $G_5 : x \mapsto \frac{5}{2} \sin(2x) + \frac{3}{4} \cos(4x)$ est une primitive sur \mathbb{R} de g_5 car $G_5' = g_5$.
6. Pour tout $x \in I = \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$, on a $g_6(x) = \frac{-u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = \cos x > 0$ sur I . Ainsi la fonction G_6 définie sur I par $G_6(x) = -\ln(\cos x)$ est une primitive sur I de g_6 .

Exercice 10 Produit et somme

1. Par identité remarquable

$$\begin{aligned} (\sin a + \cos a)^2 &= \underbrace{\sin^2 a + \cos^2 a}_{=1} + 2 \sin a \times \cos a \\ &= 1 + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sin a + \cos a = -\sqrt{\frac{9}{5}} \quad \text{ou} \quad \sin a + \cos a = \sqrt{\frac{9}{5}}.$$

Or $a \in \left[0 ; \frac{\pi}{4} \right]$ donc $\sin a \geq 0$ et $\cos a \geq 0$.

Il en résulte que $\sin a + \cos a \geq 0$.

Par conséquent

$$\sin a + \cos a = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

2. De la même manière, on a

$$\begin{aligned} (\cos a - \sin a)^2 &= \underbrace{\cos^2 a + \sin^2 a}_{=1} - 2 \cos a \times \sin a \\ &= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\cos a - \sin a = \frac{-\sqrt{5}}{5} \quad \text{ou} \quad \cos a - \sin a = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

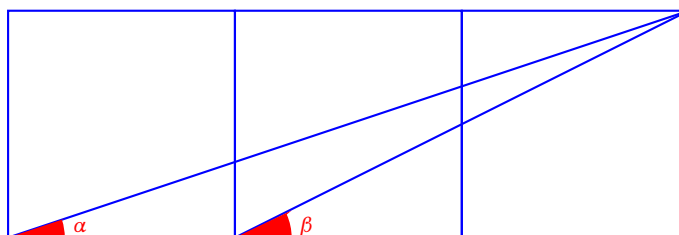
Or, pour tout $a \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, on a $\cos a \leq \sin a$ donc $\cos a - \sin a \leq 0$.

Il s'ensuit que

$$\cos a - \sin a = \frac{-\sqrt{5}}{5}.$$

Exercice 11 Addition d'angles

1. Notons x le côté des trois carrés. On a alors



$$\cos \beta = \frac{2x}{\sqrt{5}x} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \sin \beta = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De même, on trouve

$$\cos \alpha = \frac{3x}{\sqrt{10}x} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{10}x} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ainsi

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On en déduit que

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il en résulte que

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \alpha + \beta = -\frac{\pi}{4}.$$

Or $\alpha + \beta > 0$, par conséquent

$$\boxed{\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}}.$$

Exercice 12 Calcul de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

1. Posons

$$A = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

On a donc

$$A^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \quad \text{et} \quad B^2 = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Il en résulte que $A^2 = B^2$. Mais comme les réels A et B sont strictement positifs, on conclut qu'ils sont égaux, c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

2. Dans le repère orthonormé $(O ; I, J)$, les coordonnées des points A et B sont données par

$$A\left(\cos \frac{\pi}{4}; \sin \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad B\left(\cos \frac{\pi}{3}; \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

Ainsi

$$\boxed{A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

3. D'une part

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \times \cos(\vec{OA}, \vec{OB}) \\ &= 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

D'autre part, le repère $(O ; I, J)$ étant orthonormé, on a

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

4. En utilisant la relation fondamentale, valable pour tout x dans \mathbb{R} : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on trouve

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{4^2} \\ &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\pi}{12} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$$

Ainsi

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Et d'après la question 1, on conclut que

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

Exercice 13 Intégration de fonctions trigonométriques

1. On a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 + 3 \cos x) dx = 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= 5[x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 5\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + 3(1 - 0). \end{aligned}$$

Ainsi

$$I_1 = \frac{5\pi}{2} + 3.$$

2. On pose $u(x) = \cos x$.

La fonction u est à valeurs strictement positives sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Elle est de plus dérivable sur cet intervalle et on a

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} = -2 \times \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -2 \times \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} dx \\ &= -2 \left[\sqrt{u(x)} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2 \left[\sqrt{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -2 \left(\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} - \sqrt{\cos 0} \right) = -2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= -2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = -2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$I_2 = 2 - \sqrt{2}.$$

3. On pose $u(x) = \cos x$.

La fonction u est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, dont la fonction dérivée est définie par $u'(x) = -\sin x$.

Elle est de plus à valeurs strictement positives sur cet intervalle.

On a donc $\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Ainsi $x \mapsto -\ln(\cos x)$ est une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ de $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

Par le théorème fondamental du calcul intégral

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\ln(\cos x) dx \\ &= -[\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left[\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) - \ln(\cos 0) \right] \\ &= -\left[\ln\frac{1}{2} - \ln 1 \right]. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$I_3 = \ln 2.$$

4. Pour tout $x \in I = [0 ; \pi]$, on pose

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I et les fonctions u' et v' sont continues sur I .

Donc par intégration par parties

$$I_4 = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = -\pi \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + \underbrace{[\sin x]_0^\pi}_{=0}.$$

Par conséquent

$$I_4 = \pi.$$

5. Pour tout $x \in I = [0 ; \pi]$, on pose

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \sin x \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I et les fonctions u' et v' sont continues sur I .

Donc par intégration par parties

$$I_5 = \underbrace{[x^2 \sin x]_0^\pi}_{=0} - 2 \underbrace{\int_0^\pi x \sin x dx}_{=I_4}.$$

Il en résulte que

$$I_5 = -2\pi.$$

6. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^\pi x \cos^2 x dx + \int_0^\pi x \sin^2 x dx = \int_0^\pi (x \cos^2 x + x \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^\pi x \left(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} \right) dx = \int_0^\pi x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{2} [x^2]_0^\pi = \frac{1}{2} (\pi^2 - 0^2). \end{aligned}$$

On conclut que

$$I_6 = \frac{\pi^2}{2}.$$