

## Les objectifs du chapitre

La définition de l'intégrale s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par les primitives. On met en regard les écritures  $\int_a^b f(x)dx$  et  $\sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x_j$ .

### Contenu

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment  $[a ; b]$ , comme aire sous la courbe représentative de  $f$ . Notation  $\int_a^b f(x)dx$ .
- Théorème : si  $f$  est une fonction continue positive sur  $[a ; b]$ , alors la fonction  $F_a$  définie sur  $[a ; b]$  par  $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .
- Sous les hypothèses du théorème, relation  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  où  $F$  est une primitive quelconque de  $f$ . Notation  $[F(x)]_a^b$ .
- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- Intégration par parties.

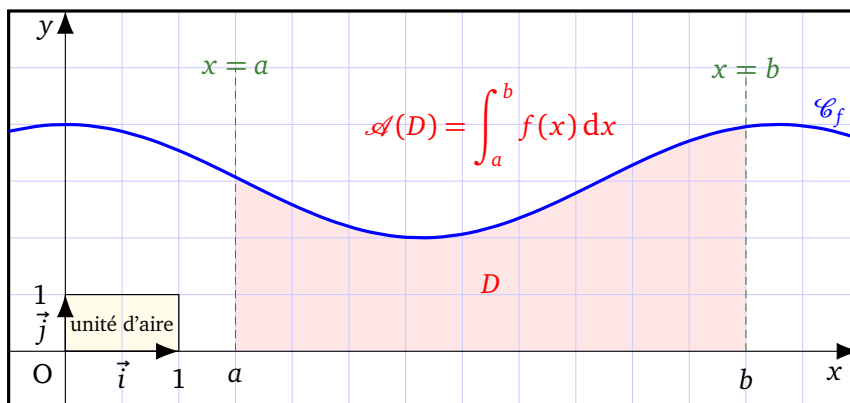
### Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

## I Le cours

### 1. Intégrale d'une fonction continue et positive

On considère un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  (non réduit à un point) et soient  $a$  et  $b$  deux points de  $I$ .  $f$  désigne une fonction **continue et positive** sur  $I$ .  $\mathcal{C}_f$  est sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



- $\int_a^b f(x) dx$  (lire l'intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$ ) est l'aire  $\mathcal{A}$ , exprimée en unité d'aire (u.a), du domaine  $D$  délimité par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .
- La variable  $x$  dans la définition de l'intégrale est **muette**. Ainsi, on pourra écrire indifféremment :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

### 2. Intégrale et primitive

#### Propriété 1 : admis

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$  où  $a \leq b$ .

La fonction  $F_a$  définie sur  $[a; b]$  par  $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$  est la **primitive** de  $f$  sur  $[a; b]$  qui s'annule en  $a$ . Autrement dit  $F_a$  est dérivable sur  $[a; b]$  et pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $F'_a(x) = f(x)$ . De plus,  $F_a(a) = 0$ .

#### Propriété 2 : le théorème fondamental de l'analyse

Pour toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $[a; b]$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Ainsi, connaître une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  permet de calculer l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$ .

#### Exemples

- ❶ Une primitive de la fonction constante  $x \mapsto 1$  étant la fonction  $x \mapsto x$ ,

on a  $\int_a^b 1 dx = [x]_a^b$ . Ainsi

$$\int_a^b 1 \, dx = \int_a^b dx = b - a$$

② Pour tout nombre réel  $c$ , une primitive de la fonction  $x \mapsto c$  est la fonction  $x \mapsto cx$ .

Donc  $\int_a^b c \, dx = [cx]_a^b = c[x]_a^b$ . D'où

$$\text{pour tout } c \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b c \, dx = c(b - a)$$

**Méthode 1 : application du théorème fondamental de l'analyse**

Calculer l'intégrale  $\int_1^e \frac{1}{x} \, dx$ .

**Corrigé**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1 ; e]$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Une primitive de  $f$  sur  $[1 ; e]$  est la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \ln(x)$ . Ainsi par le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1).$$

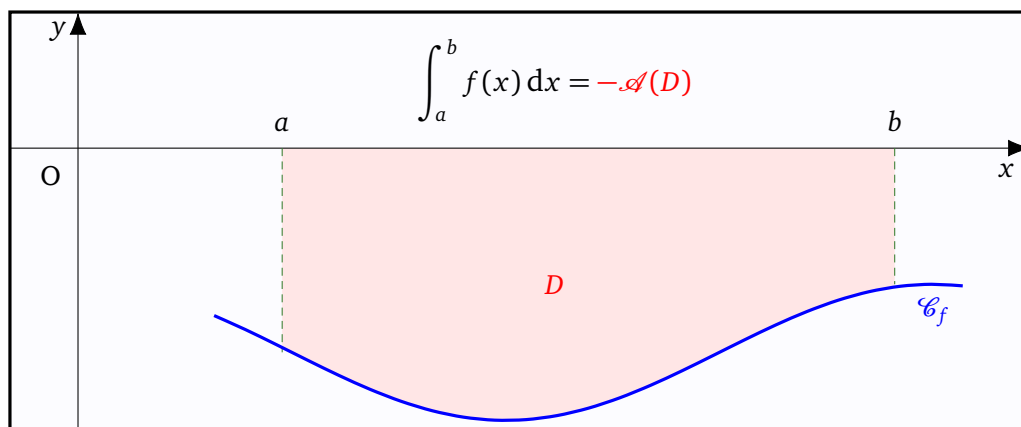
Autrement dit,

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = 1.$$

**3. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque**

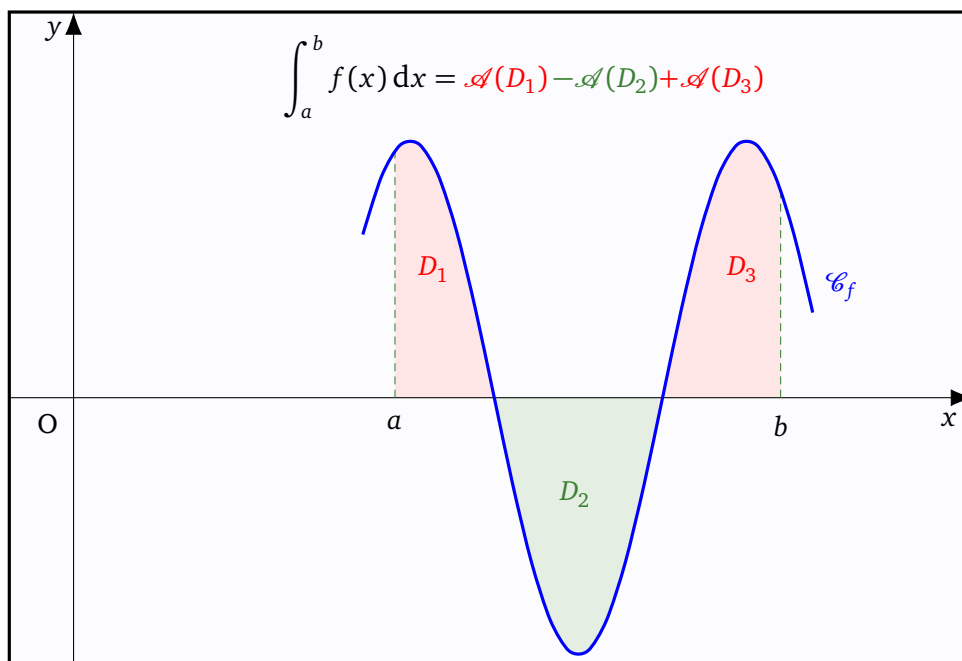
► Si  $f$  est à **valeurs négatives** sur  $[a ; b]$ , alors l'intégrale de  $f$  sur  $[a ; b]$  est **l'opposé** de l'aire du domaine délimité par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ . On a

$$\int_a^b f(x) \, dx = -\mathcal{A}(D)$$



► Si  $f$  est continue sur  $[a ; b]$  et change de signe comme indiqué dans la figure ci-dessous, alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \mathcal{A}(D_1) - \mathcal{A}(D_2) + \mathcal{A}(D_3).$$



► **Le théorème fondamental de l'analyse**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$ . Pour toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $[a ; b]$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

#### 4. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ .

$a$ ,  $b$  et  $c$  sont des éléments quelconques de  $I$  et  $\lambda$  désigne un nombre réel.

##### Linéarité de l'intégrale

- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
- $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$

**Méthode 2 : calculer l'intégrale  $\int_1^2 3(x^2 + \sqrt{5}) dx$**

Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_1^2 3(x^2 + \sqrt{5}) dx &= 3 \int_1^2 (x^2 + \sqrt{5}) dx = 3 \int_1^2 x^2 dx + 3 \int_1^2 \sqrt{5} dx \\ &= 3 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 + 3 [\sqrt{5}x]_1^2 = [x^3]_1^2 + 3\sqrt{5}[x]_1^2 \\ &= (2^3 - 1^3) + 3\sqrt{5}(2 - 1). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_1^2 3(x^2 + \sqrt{5}) dx = 7 + 3\sqrt{5}.$$

## Méthode 3 : utilisation de la linéarité de l'intégrale

Calculer l'intégrale  $\int_0^{\pi} \frac{x^4}{1+x^4} dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+x^4} dx$ .

## Corrigé

Il ne faut surtout pas essayer de calculer les intégrales séparément !  
On utilise plutôt la linéarité de l'intégrale ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x^4}{1+x^4} dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+x^4} dx &= \int_0^{\pi} \frac{x^4}{1+x^4} dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_0^{\pi} \left( \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^4} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x^4+1}{1+x^4} dx = \int_0^{\pi} 1 dx \text{ en simplifiant par la quantité non nulle } 1+x^4. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{x^4}{1+x^4} dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+x^4} dx = \pi.}$$

## Propriétés relatives aux bornes

## Propriété 3 :

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a ; b]$ .

❶ Pour tout réel  $a$ ,  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .

❷  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ .

❸ **Relation de Chasles** :  $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ .

La relation de Chasles admet la généralisation suivante : pour tous  $a_0 ; a_1 ; \dots ; a_n$  d'un intervalle  $[a ; b]$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = \int_{a_0}^{a_n} f(x) dx \quad \text{on a regroupé plusieurs intégrales en une seule.}$$

## Démonstration (exigible)

La fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a ; b]$ , elle y admet donc des primitives. Notons  $F$  l'une d'entre elles.

❶ Par le théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^a f(x) dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0.$$

❷ Par le théorème fondamental de l'analyse

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^a = F(b) - F(a) + F(a) - F(b) = 0.$$

❸ Par une double application du théorème fondamental de l'analyse, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx &= [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c \\ &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x) dx. \end{aligned}$$

#### Méthode 4 : utilisation de la relation de Chasles

Montrer que  $\sum_{k=1}^7 \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = 3 \ln(2)$ .

#### Corrigé

Par la relation Chasles

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \int_3^4 \frac{1}{x} dx + \int_4^5 \frac{1}{x} dx + \int_5^6 \frac{1}{x} dx + \int_6^7 \frac{1}{x} dx + \int_7^8 \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^8 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^8 = \ln(8) - \ln(1) = \ln(8) = \ln(2^3). \end{aligned}$$

Grâce aux propriétés algébriques du logarithme népérien, on conclut que

$$\boxed{\sum_{k=1}^7 \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = 3 \ln(2).}$$

### Positivité et croissance de l'intégrale

#### Propriété 4 : admise

On suppose que  $a \leq b$ .

- ❶ **Positivité de l'intégrale** : si  $f \geq 0$  sur  $[a ; b]$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .
- ❷ **Croissance de l'intégrale** : si  $f \leq g$  sur  $[a ; b]$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

#### Démonstration (exigible)

- ❶ Si  $f$  est positive sur le segment  $[a ; b]$ , alors  $\int_a^b f(x) dx$  représente l'aire sous la courbe de  $f$ .

Ainsi  $\int_a^b f(x) dx$  est une quantité positive.

- ❷ Si  $f \geq g$ , alors  $f - g \geq 0$  et donc par la positivité de l'intégrale  $\int_a^b (f - g)(x) dx \geq 0$ .

Ainsi, grâce à la linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0 \quad \text{ou encore} \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

**Méthode 5 : encadrer une intégrale**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x^2}$ .

❶ Montrer que pour tout  $x \geq 1$ , on a  $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ .

❷ En déduire que  $0 \leq \int_1^{\ln 5} f(x) dx \leq \frac{1}{e}$ .

**Corrigé**

❶ Si  $x \geq 1$  alors  $x^2 \geq x$  et donc  $-x^2 \leq -x$ . Ainsi par croissance de la fonction exponentielle  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ . De plus la fonction exponentielle est positive, donc  $0 \leq e^{-x^2}$ .

Il en résulte que pour tout  $x \geq 1$ , on a  $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ .

❷ Les fonctions  $x \mapsto 0$  ;  $x \mapsto e^{-x^2}$  et  $x \mapsto e^{-x}$  sont continues sur l'intervalle  $[1 ; \ln 5]$ .

Par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_1^{\ln 5} 0 dx \leq \int_1^{\ln 5} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{\ln 5} e^{-x} dx.$$

Or  $\int_1^{\ln 5} 0 dx = 0$  car cette intégrale est l'aire d'un segment

$$\text{et } \int_1^{\ln 5} e^{-x} dx = -[e^{-x}]_1^{\ln 5} = -(e^{-\ln 5} - e^{-1}) = e^{-1} - e^{\ln \frac{1}{5}} = \frac{1}{e} - \frac{1}{5} \leq \frac{1}{e}.$$

$$\text{Par conséquent } 0 \leq \int_1^{\ln 5} f(x) dx \leq \frac{1}{e}.$$

**Remarque :**

La fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  admet une primitive  $F$  sur  $[1 ; \ln 5]$  car continue sur cet intervalle. Or, il est impossible d'exprimer  $F$  à l'aide de fonctions usuelles ! On ne peut donc pas calculer l'intégrale  $\int_1^{\ln 5} e^{-x^2} dx$ .

On peut cependant encadrer cette intégrale ce qui peut être suffisant en pratique !

**5. Inégalité de la moyenne**

**Propriété 5 : inégalité de la moyenne**

soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .  $a$  et  $b$  désignent deux éléments de  $I$  tels que  $a \leq b$ .

On suppose que la fonction  $f$  est bornée sur  $[a ; b]$ . Autrement dit il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $x \in [a ; b]$ , on ait  $m \leq f(x) \leq M$ . Alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

**Démonstration (exigible)**

Pour tout  $x \in [a ; b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$ . Donc par croissance de l'intégrale

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx.$$

Par conséquent  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$ .

### 6. Valeur moyenne d'une fonction

#### Définition 1 : valeur moyenne d'une fonction

soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a ; b]$  avec  $a < b$ .  
On appelle **valeur moyenne de  $f$  sur  $[a ; b]$**  le réel  $\mu$  défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

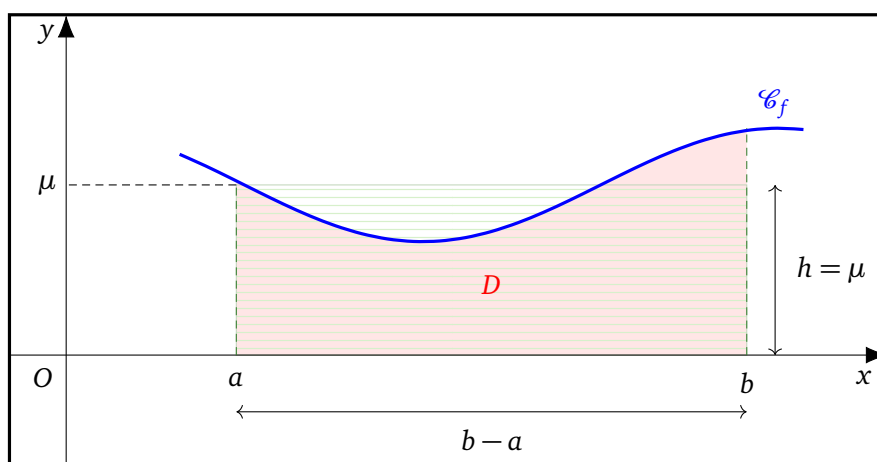
#### Interprétation graphique pour une fonction positive :

Soit  $f$  une fonction continue et **positive** sur un intervalle  $[a ; b]$  avec  $a < b$ .

Soit  $D$  le domaine délimité par  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

Calculer la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a ; b]$  revient à trouver la hauteur du rectangle hachuré en vert et de base  $b - a$  ayant la même aire que  $D$ .

On a  $\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x) \, dx$  et  $\mathcal{A}_{\text{rectangle}} = \mu(b-a)$ . Ainsi  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$  car  $b-a \neq 0$ .



#### Méthode 6 : valeur moyenne d'une fonction

Déterminer la valeur moyenne de  $f : x \mapsto e^x$  sur l'intervalle  $[1 ; 2]$ .

#### Corrigé

Par définition

$$\mu = \frac{1}{2-1} \int_1^2 f(x) \, dx = \int_1^2 e^x \, dx = [e^x]_1^2.$$

On conclut que

$$\mu = e^2 - e.$$

**Remarque :**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$  avec  $a < b$ . On suppose qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $x \in [a ; b]$ , on ait  $m \leq f(x) \leq M$ .

Par l'inégalité de la moyenne, on a  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

En divisant ces inégalités par le réel strictement positif  $b-a$ , on obtient

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad \text{ou encore} \quad \boxed{m \leq \mu \leq M}$$

Autrement dit, la valeur moyenne est toujours comprise entre les bornes de la fonction.

**7. L'intégration par parties**

$u$  et  $v$  désignent deux fonctions **dérivables** sur un intervalle  $I$ . On suppose en plus que leurs fonctions dérivées  $u'$  et  $v'$  sont **continues** sur  $I$ . Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  de  $I$  :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.}$$

**Méthode 7 : calcul de  $\int_0^1 xe^x dx$** 

Pour tout  $x \in I = [0 ; 1]$

$$\text{on pose} \quad \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$  et les fonctions  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ .  
Donc d'après la formule d'intégration par parties

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1)$$

Par conséquent

$$\boxed{\int_0^1 xe^x dx = 1.}$$

### Méthode 8 : calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

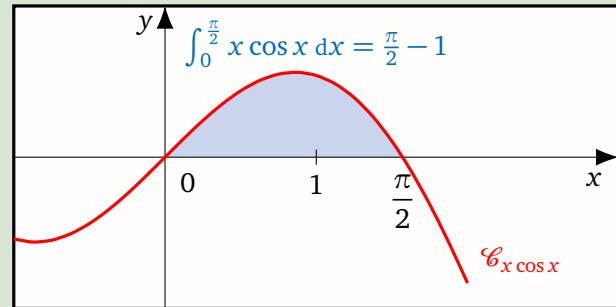
Pour tout  $x \in I = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x \end{cases}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$  et les fonctions  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ .

Ainsi la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \sin x \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \times \sin 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0. \end{aligned}$$



Par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

- l'intégration par parties a permis dans cet exemple de baisser d'une unité l'exposant du monôme  $x$  en le dérivant, ce qui explique le choix de poser  $u(x) = x$ .
- On pensera à intégrer par parties lorsque l'on recherche une primitive de fonctions de la forme :  $x^n \sin x$  ;  $x^n \cos x$  ;  $x^n e^x$  ;  $x^n \ln x$  ;  $\ln^n x$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## II Les exercices

### Exercice 1 Calcul d'une aire

Soit la fonction continue  $f$  définie sur  $[0 ; e]$  par  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } 1 < x \leq e \end{cases}$

Sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est donnée ci-contre dans un repère orthonormé.

2. Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

1. Étudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $[0 ; e]$ .

### Exercice 2 Calcul d'intégrales à l'aide d'aires

Calculer, à l'aide de considérations géométriques, chacune des intégrales suivantes.

1.  $I = \int_0^2 (4 - 2x) dx$

2.  $J = \int_{-2}^3 |x| dx$

### Exercice 3 Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

Calculer les intégrales suivantes.

1.  $I_1 = \int_0^1 (5x^2 - 3x + 1) dx$

3.  $I_3 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

5.  $I_5 = \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx$

2.  $I_2 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left( 5 + \frac{3}{x} \right) dx$

4.  $I_4 = \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{x \ln 2} dx ; n \in \mathbb{N}$

6.  $I_6 = \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2 + 5} dx$

### Exercice 4 Calcul d'une intégrale

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$ .

2. Calculer l'intégrale  $I = \int_1^{\sqrt{e-1}} \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx$ .

### Exercice 5 Une suite d'intégrales

On considère la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$I_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$$

1. Calculer  $I_0$ .
2. Justifier que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $I_n \geq 0$ .
3. Montrer que la suite  $(I_n)$  est croissante.
4. Montrer que pour tout réel  $x \geq 0$ , on a  $-x^2 \leq -2x + 1$ .
5. En déduire que pour tout réel  $x \geq 0$ , on a  $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ .
6. Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $I_n \leq \frac{e(1 - e^{-2n})}{2}$ .

- 7. En déduire que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $I_n \leq \frac{e}{2}$ .
- 8. Montrer que la suite  $(I_n)$  est convergente. On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant :

**Propriété 6 : admise**

$(u_n)$  désigne une suite numérique.

- Si  $(u_n)$  est croissante et majorée alors elle converge.
- Si  $(u_n)$  est décroissante et minorée alors elle converge.

Ce théorème **ne fournit pas** la valeur de la limite !

**Vocabulaire**

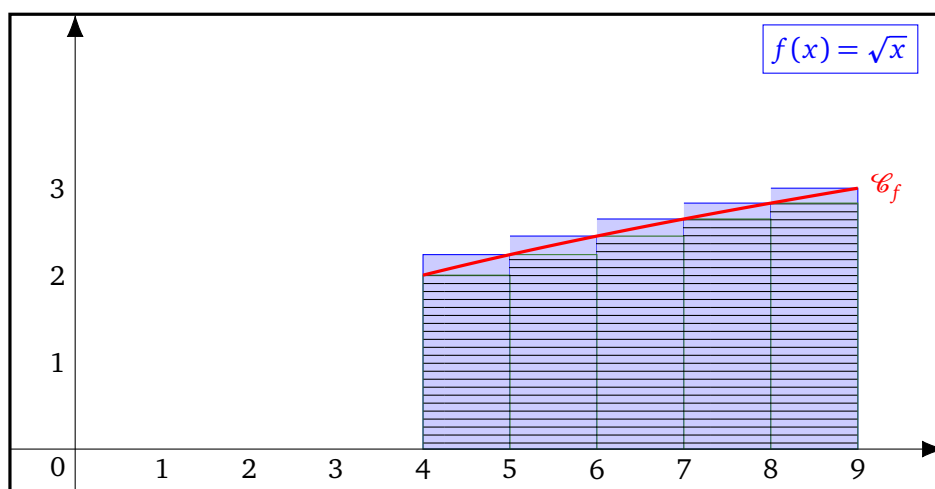
- La suite  $(u_n)$  est **majorée** par  $M$  si pour tout  $n$ ,  $u_n \leq M$ .  $M$  est appelé **un majorant** de  $(u_n)$ .
- La suite  $(u_n)$  est **minorée** par  $m$  si pour tout  $n$ ,  $m \leq u_n$ .  $m$  est appelé **un minorant** de  $(u_n)$ .

**Exercice 6 La méthode des rectangles**

- 1. Montrer par encadrement que

$$10 \leq \int_4^9 \sqrt{x} dx \leq 15$$

- 2. On représente dans un repère orthonormé la fonction  $f$  définie sur  $[4 ; 9]$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ . Afin d'améliorer l'encadrement obtenu au 1, on encadre la fonction  $f$  par deux séries de rectangles (une série de rectangles hachurés et une série de rectangles bleus) comme indiqué sur la figure ci-dessous.



- (a) À l'aide des rectangles hachurés, montrer que

$$\sum_{k=4}^8 f(k) \leq \int_4^9 \sqrt{x} dx.$$

- (b) À l'aide des rectangles bleus montrer que

$$\int_4^9 \sqrt{x} dx \leq \sum_{k=5}^9 f(k).$$

- (c) En déduire l'encadrement suivant

$$12,15 \leq \int_4^9 \sqrt{x} dx \leq 13,16$$

3. (a) Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $[4 ; 9]$  par  $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$  est une primitive de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $[4 ; 9]$
- (b) En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près de l'intégrale  $\int_4^9 \sqrt{x} dx$ .

**Exercice 7** L'intégration par parties

Histoire des maths

L'intégration par parties (parfois abrégée en IPP) est une méthode classique du calcul intégral qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales. Le point de départ est la formule  $(uv)' = u'v + uv'$  où  $u$  et  $v$  sont des fonctions suffisamment régulières.

L'intégration par parties permet par exemple de trouver une primitive de la fonction logarithme népérien :

$$\int_e^x \ln t \, dt = x \ln x - x.$$

Le mathématicien anglais Brook Taylor a publié l'idée de cette méthode en 1715. La même année il montre qu'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point peut être approchée par une fonction polynomiale dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.



Brook Taylor 1685-1731

**Partie A : le théorème d'intégration par parties**

On considère deux fonctions  $u$  et  $v$  continues et dérivables sur un intervalle  $[a ; b]$  telles que les fonctions dérivées  $u'$  et  $v'$  sont aussi continues sur  $[a ; b]$ .

En partant de la formule  $(uv)' = u'v + uv'$ , montrer que

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

**Partie B : quelques applications de l'intégration par parties**

1. En utilisant le théorème d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

(a)  $I = \int_1^e \ln x \, dx$

(b)  $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

2. On rappelle que (voir la méthode 7)  $K = \int_0^1 x e^x \, dx = 1$ .

(a) Montrer que l'intégrale  $L = \int_0^1 x^2 e^x \, dx$  vérifie la relation suivante :  $L = [x^2 e^x]_0^1 - 2K$ .

- (b) En déduire la valeur de l'intégrale  $L$ .

**Exercice 8** Croissances comparées

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$ .

- Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$ .
- Montrer que  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .
- En déduire que pour tout  $x \geq 1$ , on a  $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ .

4. Montrer que pour tout  $x \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$
5. En déduire la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$ .
6. On considère la fonction  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = x \left( -1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x \right)$ .
  - (a) Montrer que  $F$  est une primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $f$ .
  - (b) En déduire que  $\int_1^4 f(x) dx = \frac{19}{3} - 8 \ln(2)$ .

### Exercice 9 La série harmonique

#### Partie A

1. **Méthode 1**  
 On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(1+x) - x$ .
  - (a) Donner une expression de la fonction dérivée  $f'$ .
  - (b) Donner le tableau de variations de la fonction  $f$ . On pourra admettre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .
  - (c) En déduire que pour tout réel  $x > -1$ , on a  $\ln(1+x) \leq x$ .
2. **Méthode 2**
  - (a) Étudier la convexité de la fonction  $\ln$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - (b) Donner l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 1.
  - (c) En déduire que pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\ln(x) \leq x - 1$ .

#### Partie B

1. Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

2. En utilisant le résultat de la question 1.(c) de la partie A, montrer que pour tout entier  $k \geq 1$ , on a

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

#### Partie C

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$ , on a

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \ln(1+n)$$

2. En utilisant les questions précédentes, prouver que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $u_n \geq \ln(1+n)$ .
3. Justifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1+n) = +\infty$ .
4. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 10** Continuité d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt & \text{si } x > 0 \\ \ln 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier la continuité de la fonction  $f$  en  $0^+$ .

1. Soit  $x$  est réel fixé strictement positif. Montrer que pour tout  $t \in [x ; 2x]$

$$e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$$

2. En déduire que pour tout  $x > 0$

$$e^{-2x} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-x} \ln 2$$

3. Que peut-on dire de la continuité de  $f$  en  $0^+$  ?

**Exercice 11** Inspiré du Bac Japon 1997

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la fonction  $f_n$  sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ .

$\mathcal{C}_{f_n}$  désigne la courbe de  $f_n$  dans un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie 1 : le cas  $n = 1$**

- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ . On pourra utiliser  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .
- Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Étudier les variations de la fonction  $f_1$ .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_{f_1}$  au point d'abscisse 1.

**Partie 2 : le cas  $n = 2$**

- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ .
- Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f_2'(x) = \frac{2 \ln x}{x^3} (1 - \ln x)$  puis donner le tableau des variations de  $f_2$ .

**Partie 3 : position relative de  $\mathcal{C}_{f_1}$  et  $\mathcal{C}_{f_2}$**

- Étudier le signe de l'expression  $f_2(x) - f_1(x)$ .
- En déduire la position relative de  $\mathcal{C}_{f_1}$  et  $\mathcal{C}_{f_2}$ .

**Partie 4**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$ .

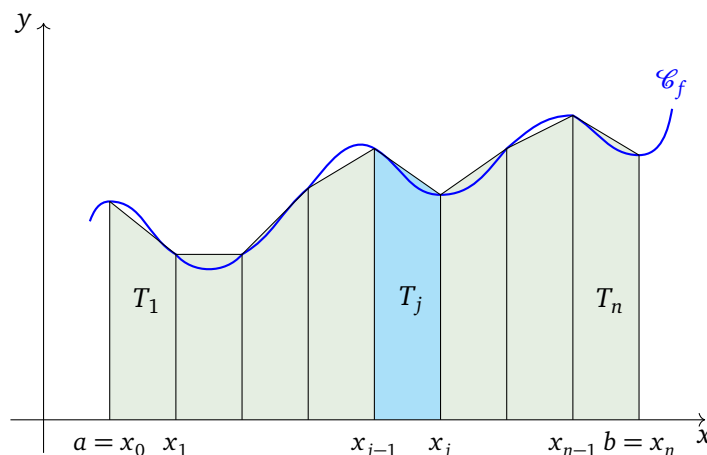
On considère la fonction  $F$  définie sur  $[1 ; e]$  par  $F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ .

- Calculer  $F'(x)$ .
- En déduire  $I_1$ .

**Exercice 12** La méthode des trapèzes

Le théorème fondamental de l'analyse nous permet de calculer  $\int_a^b f(x) dx$  dès que l'on connaît une primitive  $F$  de la fonction continue  $f$  définie sur le segment  $[a ; b]$ . Mais plusieurs problèmes se posent :

- le nombre de fonctions dont on sait calculer une primitive est très faible ! Par exemple la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  est continue sur  $[0 ; 1]$ , elle y admet donc une primitive  $F$ . Or il est impossible d'exprimer  $F$  à l'aide de fonctions usuelles.
- La connaissance d'une primitive  $F$  de  $f$  n'est parfois pas suffisant pour calculer les valeurs de  $F$ . Par exemple  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2)$ , mais on ne connaît pas explicitement  $\ln(2)$ .



La méthode des trapèzes permet d'approcher  $\int_a^b f(x) dx$  où  $f$  est une fonction continue (et positive) sur  $[a ; b]$ . On divise le segment  $[a ; b]$  en  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) sous intervalles de même longueur  $[x_{j-1} ; x_j]$  ( $1 \leq j \leq n$ ). On pose  $h = \frac{b-a}{n}$ , ainsi pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j \leq n$  on a  $x_j = x_{j-1} + h = a + jh$ .

1. Montrer que l'aire  $\mathcal{A}_j$  du trapèze  $T_j$  (voir la figure ci-dessus) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\mathcal{A}_j = \frac{h}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

2.  $S_n$  désigne la somme des aires  $\mathcal{A}_j$  pour  $j \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ . Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right]$$

La méthode des trapèzes permet d'écrire (dans des conditions raisonnables)  $\int_a^b f(x) dx \approx S_n$ .

3. On souhaite appliquer la méthode des trapèzes pour approcher  $\ln 2$ .

(a) Calculer  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ .

(b) Compléter le programme suivant :

```

from math import *

def f(x):
    return 1/x

def trapezes (a, b, n):
    h=(b-a)/n
    S=(f(a)+f(b))/2
    for i in range(1,n):
        S=S+f(a+i*h)
    S=.....
    return S
    
```

- (c) Que renvoie **trapezes** (1,2,100)?  
 (d) En déduire une valeur approchée au centième de  $\ln(2)$ .

### Exercice 13 Amérique du Nord 2024

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx, \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx.$$

1. Calculer  $I_0$ .
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $I_n \geq 0$ .  
 (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ .  
 (c) Déduire des deux questions précédentes que la suite  $(I_n)$  converge.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx.$$

- (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$\int_0^\pi e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}.$$

- (c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite  $(I_n)$ .

4. (a) En intégrant par parties l'intégrale  $I_n$  de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang  $n$  à partir duquel la suite  $(I_n)$  devient inférieure à 0,1.  
 Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```

1 from math import *
2 def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     ...
6         n=n+1
7         I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8 return n
  
```

**Exercice 14** Interrogation du 2 avril 2025

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = x - 2\ln(x).$$

On admet que la fonction  $g$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

- 1. (a) Déterminer, en justifiant, la limite de  $g$  en  $+\infty$ , puis sa limite en  $0^+$ . 1 point
- (b) Déterminer  $g'(x)$ , pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ . 1 point
- (c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ . 1 point
- (d) En déduire que, pour tout  $x > 0$ ,  $g(x) > 0$ . 1 point
- 2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x - (\ln(x))^2.$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  et on note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

- (a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , puis interpréter graphiquement le résultat. 1 point
- (b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

On pourra commencer par justifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$ , en posant  $t = \sqrt{x}$ . 1 point

- (c) Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ . 1 point
- (d) En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ . 1 point
- (e) Déterminer l'équation réduite de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1. 1 point

On notera  $\Delta$  cette droite.

- (f) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0 ; +\infty[$  et que  $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$ .

On admet que  $(\ln(2))^2 < \frac{1}{2}$ . 2 points

- (g) Montrer que, pour tout  $x > 0$ , 1 point

$$f''(x) = \frac{2[\ln(x) - 1]}{x^2}.$$

- (h) En déduire les coordonnées de  $\Omega$ , unique point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ . 1 point
- (i) Montrer, en utilisant le théorème fondamental de l'analyse, que 2 points

$$\int_1^e \frac{\ln(x) - 1}{x^2} dx = \frac{-1}{e}.$$

- 3. Montrer que la fonction  $H : x \mapsto x \ln(x) - x$  est une primitive de la fonction  $\ln : x \mapsto \ln(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ . 1 point
- 4. En déduire la valeur de  $\int_1^e \ln(x) dx$ . 1 point
- 5. Montrer que 1 point

$$\int_1^e (\ln(x))^2 dx = e - 2.$$

- 6. En déduire, une valeur approchée à  $10^{-1}$  près, de l'aire du domaine situé entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ . 2 points

**Exercice 15 Interrogation (rattrapage) du 10 avril 2025**

**Partie 1**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = (x - 1)e^x + x + 1.$$

- 1. Déterminer, pour tout  $x \geq 0$ , une expression de  $g'(x)$ . 1 point
- 2. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ . 1 point
- 3. Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $g(x) \geq 0$ . 1 point

**Partie 2**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$f(x) = \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}.$$

$\mathcal{C}_f$  désigne la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(-x) = -f(x)$ . 1 point
- 2. (a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ . 1 point  
 (b) En déduire, en justifiant, la limite de  $f$  en  $0^+$ . 1 point  
 (c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu. 1 point
- 3. (a) Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ , 1 point

$$f(x) = \frac{x}{e^x(1 - e^{-x})^2}.$$

- (b) En déduire, en justifiant, la limite de  $f$  en  $+\infty$ . 1 point
- (c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu. 1 point
- 4. (a) Montrer que, pour tout  $x > 0$ , 1 point

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x - 1)^3}.$$

- (b) Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ . 1 point

**Partie 3**

- 1. Montrer que 3 points

$$\int_2^3 \frac{1}{t(t-1)} dt = 2 \ln(2) - \ln(3).$$

**Indication :** on pourra commencer par montrer que  $\frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}$ .

- 2. Montrer que 3 points

$$\int_2^3 \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} dt = 3 \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(3).$$

- 3. On admet le résultat suivant :

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} f(x) dx = \int_2^3 \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} dt.$$

En déduire, une valeur approchée à  $10^{-1}$  près, de l'aire du domaine situé entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = \ln(3)$  et  $x = \ln(2)$ . 2 points

## III Corrigé des exercices

## Exercice 1 Calcul d'une aire

1. La fonction linéaire  $x \mapsto 2x$  est continue sur  $[0 ; 1]$  et la fonction  $x \mapsto \frac{2}{x}$  est continue sur  $]1 ; e]$ .  
 $f$  est donc continue sur ces deux intervalles.

De plus  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ . Donc la fonction  $f$  est continue en 1.

Il en résulte que la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0 ; e]$ .

2. La fonction  $f$  est continue et positive sur le segment  $[0 ; e]$ , donc l'aire sous la courbe est donnée par

$$\begin{aligned} \int_0^e f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx && \text{relation de Chasles} \\ &= \int_0^1 2x dx + \int_1^e \frac{2}{x} dx \\ &= 2 \int_0^1 x dx + 2 \int_1^e \frac{1}{x} dx && \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= 2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + 2 [\ln x]_1^e && \text{théorème fondamental du calcul intégral} \\ &= (1^2 - 0^2) + 2(\ln e - \ln 1) \\ &= 1 + 2 && \ln e = 1 \text{ et } \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

L'aire recherchée est donc égale à 3 u.a.

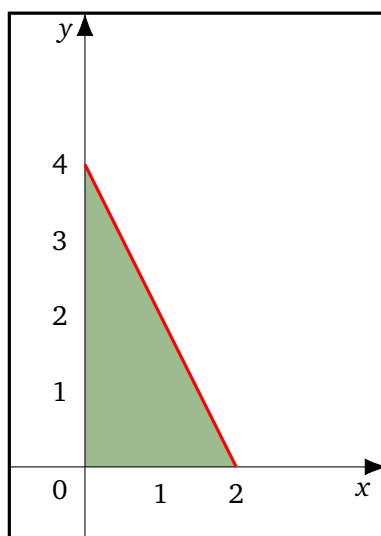
## Exercice 2 Calcul d'intégrales à l'aide d'aires

1. Calcul de  $I = \int_0^2 (4 - 2x) dx$  :

La fonction affine  $x \mapsto 4 - 2x$  est continue et positive sur l'intervalle  $[0 ; 2]$ .

Sa courbe représentative est le segment rouge. Ainsi  $I$  est l'aire du triangle rectangle vert ci-dessous.

Par conséquent  $\int_0^2 (4 - 2x) dx = \frac{2 \times 4}{2} = 4$ .

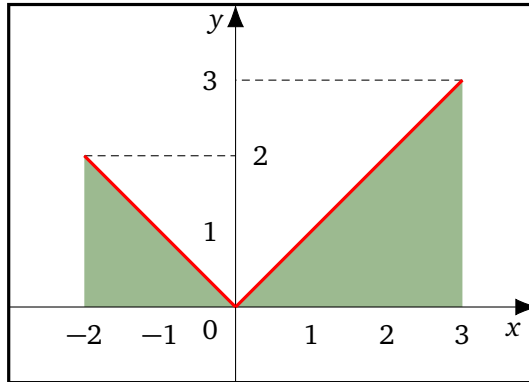


2. Calcul de  $J = \int_{-2}^3 |x| dx$  :

La fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 3]$  par  $x \mapsto |x| = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$  est continue et positive sur cet intervalle.

Ainsi  $J$  est l'aire des deux triangles verts ci-dessous.

Par conséquent  $J = \int_{-2}^3 |x| dx = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{3 \times 3}{2} = \frac{13}{2}$ .



**Exercice 3** Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

1. Grâce à la linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 x dx + \int_0^1 1 dx \\ &= 3 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - 2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + [x]_0^1 \\ &= [x^3]_0^1 - [x^2]_0^1 + [x]_0^1 \\ &= (1^3 - 0^3) - (1^2 - 0^2) + (1 - 0) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$I_1 = 1$$

2. On a

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left( 5 + \frac{3}{x} \right) dx = 5 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 1 dx + 3 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx && \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= 5 [x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + 3 [\ln x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} && \text{théorème fondamental du calcul intégral} \\ &= 5 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + 3 \left( \ln \left( \frac{1}{2} \right) - \ln \left( \frac{1}{4} \right) \right) \\ &= \frac{5}{4} + 3 \ln \left( \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \right) && \text{propriétés algébriques de ln} \end{aligned}$$

Donc

$$I_2 = \frac{5}{4} + 3 \ln 2$$

3. La fonction  $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  où  $u$  est à valeurs strictement positives sur  $[\ln 2 ; \ln 3]$ .  
Par le théorème fondamental du calcul intégral

$$I_3 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln(e^{\ln 3} + 1) - \ln(e^{\ln 2} + 1) \\ = \ln(3 + 1) - \ln(2 + 1) = \ln 4 - \ln 3$$

On conclut que

$$I_3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

4. Pour tout entier naturel  $n$

$$I_4 = \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{x \ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\ln 2} [\ln x]_{2^n}^{2^{n+1}} \\ = \frac{1}{\ln 2} [\ln(2^{n+1}) - \ln(2^n)] \\ = \frac{1}{\ln 2} [(n+1)\ln 2 - n \ln 2] = \frac{\ln 2}{\ln 2}$$

Il en résulte que

$$\text{pour tout entier naturel } n \quad I_4 = 1$$

5. La fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  est de la forme  $u'u$  où  $u(x) = \ln x$  et dont une primitive est  $\frac{1}{2}u^2$ .  
Il s'ensuit que

$$I_5 = \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \\ = 2 \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2$$

Par conséquent

$$I_5 = 1$$

6. La fonction  $f : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 5}$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  où la fonction  $u$  est à valeurs strictement positives sur le segment  $[-1 ; 1]$ .

La fonction  $F : x \mapsto \ln(x^2 + 5)$  est donc une primitive de  $f$  sur ce même intervalle et on a par le théorème fondamental du calcul intégral

$$I_6 = \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2 + 5} dx = [\ln(x^2 + 5)]_{-1}^1$$

On obtient donc

$$I_6 = 0$$

**Exercice 4** Calcul d'une intégrale

1. Pour  $x \neq 0$

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - x \times x}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{x(x^2 + 1)}$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$

$$\boxed{\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{e-1}} \frac{1}{x(x^2 + 1)} &= \int_1^{\sqrt{e-1}} \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx && \text{question précédente} \\ &= \int_1^{\sqrt{e-1}} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{e-1}} \frac{2x}{x^2 + 1} dx && \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= [\ln x]_1^{\sqrt{e-1}} - \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_1^{\sqrt{e-1}} && \text{théorème fondamental de l'analyse} \\ &= \ln(\sqrt{e-1}) - \underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{2} (\ln(\sqrt{e-1}^2 + 1) - \ln 2) \\ &= \frac{1}{2} \ln(e-1) - \frac{1}{2} \underbrace{\ln e}_{=1} + \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\int_1^{\sqrt{e-1}} \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{2} (\ln(e-1) + \ln 2 - 1)}$$

**Exercice 5** Une suite d'intégrales

1. On a

$$\boxed{I_0 = \int_0^0 e^{-x^2} dx = 0}$$

2. La fonction continue  $x \mapsto e^{-x^2}$  est à valeurs strictement positives sur  $\mathbb{R}$ . Donc par positivité de l'intégrale,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 0 \quad \int_0^n e^{-x^2} dx \geq 0}$$

3. Pour tout entier  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^n e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx + \int_n^0 e^{-x^2} dx \\ &= \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \quad (\text{relation de Chasles}). \end{aligned}$$

Or

- $x \mapsto e^{-x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ;
- pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $n \leq n + 1$  sans changer d'ordre.

Donc par positivité de l'intégrale, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \geq 0$ .

Autrement dit

la suite  $(I_n)$  est croissante.

4. Pour tout réel  $x \geq 0$ , on a  $(x - 1)^2 \geq 0$ , donc  $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ . Ainsi

pour tout réel  $x \geq 0$   $-x^2 \leq -2x + 1$

5. Par la croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$  et en utilisant l'inégalité précédente, il vient que

pour tout réel  $x \geq 0$   $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$

6. Pour tout entier  $n \geq 0$ , les fonctions  $x \mapsto e^{-x^2}$  et  $x \mapsto e^{-2x+1}$  sont continues sur le segment  $[0 ; n]$ . De plus, pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ . Donc par croissance de l'intégrale, pour tout entier  $n \geq 0$

$$\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^n e^{-2x+1} dx$$

Or  $\int_0^n e^{-2x+1} dx = \frac{-1}{2} [e^{-2x+1}]_0^n = \frac{-1}{2} (e^{-2n+1} - e) = \frac{e}{2} (1 - e^{-2n})$ .

Par conséquent

pour tout entier  $n \geq 0$   $\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \frac{e(1 - e^{-2n})}{2}$

7. Montrons que pour tout entier  $n \geq 0$ , on a  $\frac{e(1 - e^{-2n})}{2} \leq \frac{e}{2}$ . Pour cela on étudie le signe de la différence :

$$\frac{e}{2} - \frac{e(1 - e^{-2n})}{2} = \frac{e}{2} [1 - (1 - e^{-2n})] = \frac{e}{2} \times e^{-2n} \geq 0$$

Il s'ensuit que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\frac{e(1 - e^{-2n})}{2} \leq \frac{e}{2}$  et on conclut par l'inégalité de la question précédente que

pour tout entier  $n \geq 0$   $I_n \leq \frac{e}{2}$

8. La suite  $(I_n)$  est croissante et majorée par le nombre  $\frac{e}{2}$ .

Par le théorème (admis dans l'énoncé) :

la suite  $(I_n)$  converge.

### Exercice 6 La méthode des rectangles

1. On a  $4 \leq x \leq 9$  et donc par croissance de la fonction racine carrée sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $\sqrt{4} \leq x \leq \sqrt{9}$ .  
Autrement dit  $2 \leq \sqrt{x} \leq 3$ .  
Or  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[4 ; 9]$  et  $4 < 9$ , donc par croissance de l'intégrale on conclut que

$$\int_4^9 2dx \leq \int_4^9 \sqrt{x}dx \leq \int_4^9 3dx$$

Par conséquent

$$10 \leq \int_4^9 \sqrt{x}dx \leq 15$$

2. (a) On remarque d'abord que la base de chacun des rectangles est égale à 1.  
De plus la somme des aires des rectangles hachurées est inférieure à l'aire sous la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

$$\text{Ainsi } f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) \leq \int_4^9 \sqrt{x}dx.$$

Ou encore

$$\sum_{k=4}^8 f(k) \leq \int_4^9 \sqrt{x}dx$$

- (b) La somme des aires des rectangles bleus est supérieure à l'aire sous la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

$$\text{Ainsi } f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) \geq \int_4^9 \sqrt{x}dx.$$

Ou encore

$$\int_4^9 \sqrt{x}dx \leq \sum_{k=5}^9 f(k)$$

- (c) D'après les deux questions précédentes, on a

$$\sum_{k=4}^8 f(k) \leq \int_4^9 \sqrt{x}dx \leq \sum_{k=5}^9 f(k)$$

$$\text{Or } 12,15 \leq \sum_{k=4}^8 f(k) \text{ et } \sum_{k=5}^9 f(k) \leq 13,16.$$

Par conséquent

$$12,15 \leq \int_4^9 \sqrt{x}dx \leq 13,16$$

3. (a) La fonction  $F$  est le produit de deux fonctions dérivables sur l'intervalle  $[4 ; 9]$ . Par conséquent  $F$  est dérivable sur ce même intervalle et on a pour tout  $x \in [4 ; 9]$

$$F'(x) = \frac{2}{3} \left( 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{3} \left( \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{x} = \sqrt{x} = f(x)$$

Il en résulte que

la fonction  $F$  est bien une primitive sur  $[4 ; 9]$  de la fonction  $f$ .

(b) Par le théorème fondamental de l'analyse

$$\int_4^9 \sqrt{x} dx = \left[ \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_4^9 = \frac{2}{3} (9\sqrt{9} - 4\sqrt{4})$$

Ainsi

$$\int_4^9 \sqrt{x} dx = \frac{38}{3} \quad \text{et} \quad \int_4^9 \sqrt{x} dx \approx 12,67.$$

## Exercice 7 L'intégration par parties

### Partie A : le théorème d'intégration par parties

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur le segment  $[a ; b]$  donc le produit  $uv$  est aussi dérivable sur  $[a ; b]$  et on a  $(uv)' = u'v + uv'$ .

De plus, les fonctions  $uv$ ,  $u'v$  et  $uv'$  sont continues sur  $[a ; b]$  et on a

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx$$

Par le théorème fondamental de l'analyse  $\int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$ .

Et grâce à la linéarité de l'intégrale  $\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ .

Il en résulte que

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

### Partie B : quelques applications de l'intégration par parties

1. (a) Pour tout  $x \in I = [1 ; e]$

$$\text{on pose} \quad \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$  et les fonctions  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ .

Donc d'après la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e 1 \times \ln x dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx \\ &= e - (e - 1) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_1^e \ln x dx = 1$$

(b) Pour tout  $x \in I = [1 ; e]$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$  et les fonctions  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ .  
Donc d'après la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx &= \int_1^e \ln x \times \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[ \frac{-\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \left( \frac{-1}{x} \right) dx \\ &= \frac{-1}{e} - \left[ \frac{1}{x} \right]_1^e = \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{e-2}{e}}$$

**2.** (a) Pour tout  $x \in I = [1 ; e]$

$$\text{on pose } \begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$  et les fonctions  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ .  
Donc d'après la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx &= \int_0^1 x^2 \times e^x dx \\ &= [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx \\ &= [x^2 e^x]_0^1 - 2 \underbrace{\int_0^1 x e^x dx}_{=K} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{L = [x^2 e^x]_0^1 - 2K}$$

(b) D'une part  $[x^2 e^x]_0^1 = e$ .

D'autre part  $K = 1$  (voir la méthode). Par conséquent

$$\boxed{\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2}$$

**Exercice 8 Croissances comparées**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$ .

1. La fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  et on a pour tout  $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1 \times \sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x}$$

Par conséquent

$$\text{pour tout } x > 0 \quad f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$$

2. Soit  $x \in [1 ; +\infty[$ . Comme  $x > 0$ , le signe de  $f'(x)$  est celui de  $\sqrt{x} - 1$ .  
Or pour  $x \geq 1$  on a  $\sqrt{x} \geq \sqrt{1} = 1$  par croissance de la fonction racine carrée sur  $[1 ; +\infty[$ .  
Il s'ensuit que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$ .  
Ainsi la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

3. On sait que pour tout  $x \geq 1$ ,  $0 \leq \ln x$ .  
D'autre part la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$

$$\text{donc pour tout } x \geq 1 \quad f(1) \leq f(x) \quad \text{ou encore} \quad 0 \leq 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$$

Ainsi  $\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$ .

On conclut que

$$\text{pour tout } x \geq 1 \quad 0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$$

4. Pour tout  $x \geq 1$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ln x \leq 2\sqrt{x} \\ 0 &\leq (\ln x)^3 \leq (2\sqrt{x})^3 \quad \text{par croissance de la fonction } x \mapsto x^3 \text{ sur } \mathbb{R} \\ 0 &\leq (\ln x)^3 \leq 8x\sqrt{x} \end{aligned}$$

Il vient en divisant par le nombre strictement positif  $x^2$  que

$$\text{pour tout } x \geq 1 \quad 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

5. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$ . Donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0$$

6. (a) La fonction  $F$  définie par  $F(x) = x \left( -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et on a pour tout  $x > 0$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 \times \left( -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right) + x \left( \frac{4}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) \\ &= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + \frac{4}{3}x + \frac{2x}{3\sqrt{x}} - 1 \\ &= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x \end{aligned}$$

Il en résulte que

La fonction  $F$  est bien une primitive sur  $]0 ; +\infty[$  de la fonction  $f$ .

(b) Par le théorème fondamental de l'analyse

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x)dx &= [F(x)]_1^4 = F(4) - F(1) \\ &= 4\left(-1 + \frac{4}{3} \times \sqrt{4} - \ln 4\right) - 1\left(-1 + \frac{4}{3} \times \sqrt{1} - \ln 1\right) \\ &= -4 + \frac{32}{3} - 4 \ln(2^2) + 1 - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{12}{3} + \frac{32}{3} - 8 \ln 2 + \frac{3}{3} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_1^4 f(x)dx = \frac{19}{3} - 8 \ln 2$$

### Exercice 9 La série harmonique

#### Partie A

##### 1. Méthode 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(1+x) - x$ .

(a) La fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  (somme de deux fonctions dérivables sur ce même intervalle) et on a pour tout  $x > -1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

(b) L'étude du signe de  $x \mapsto \frac{-x}{1+x}$  nous permet d'obtenir le tableau de variations de  $f$  qui suit

$x$	-1	0	+∞
<b>Signe de <math>f'(x)</math></b>	+	0	-
<b>Variations de <math>f(x)</math></b>			

(c) D'après le tableau de variations ci-dessus, on remarque que 0 est un maximum (global) pour la fonction  $f$ , c'est-à-dire pour tout  $x > -1, f(x) \leq f(0)$ . Par conséquent

$$\text{pour tout réel } x > -1 \quad \ln(1+x) \leq x$$

##### 2. Méthode 2

(a) La fonction  $\ln$  admet une dérivée seconde sur  $]0 ; +\infty[$  donnée par  $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ .

Or pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{-1}{x^2} < 0$ . Autrement dit la dérivée seconde de  $\ln$  est strictement négative sur son domaine de définition.

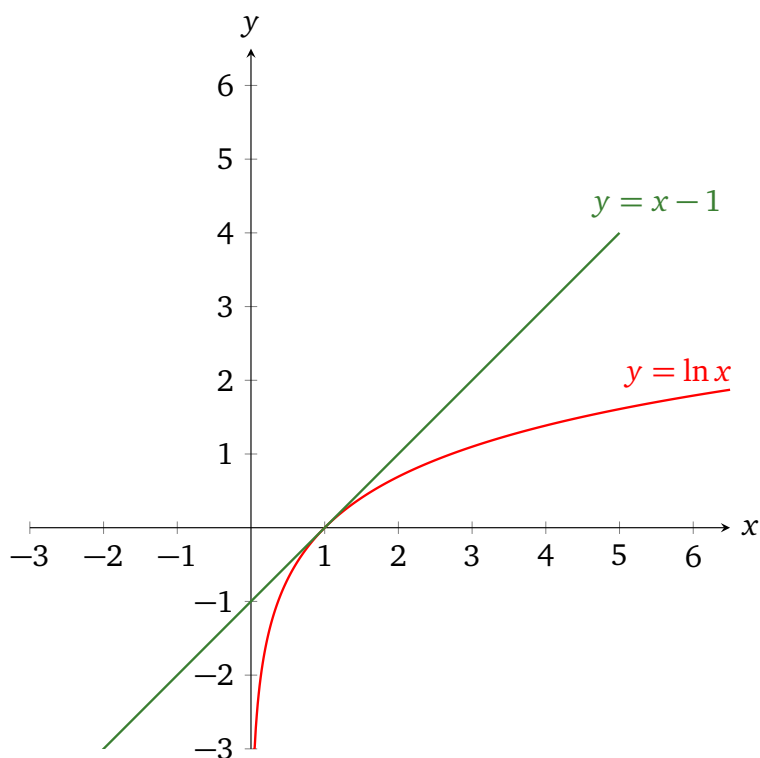
Il s'ensuit que la fonction logarithme népérien est concave sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

(b) On rappelle que l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 1 admet pour équation  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ , ce qui donne  $y = 1 \times (x - 1) + \ln 1$  ainsi  $y = x - 1$ .

(c) La fonction  $\ln$  est concave sur son domaine de définition, il s'ensuit que sa courbe est en dessous de chacune de ses tangentes, en particulier sa tangente au point d'abscisse 1.

Ceci se traduit par l'inégalité suivante

$$\text{pour tout réel } x > 0 \quad \ln x \leq x - 1$$



## Partie B

1. Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a pour tout entier  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx &= [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k \\ &= \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \quad \text{par les propriétés algébriques de } \ln \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

2. D'après ce qui précède, pour tout réel  $x > -1$ , on a  $\ln(1+x) \leq x$ .

En particulier pour  $x = \frac{1}{k}$  où  $k$  est un entier tel que  $k \geq 1$ , on a bien  $\frac{1}{k} > -1$  et

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

$$\text{Or } \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \text{ donc pour tout entier } k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx.$$

**Partie C**

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

**1.** Pour tout entier  $k \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx && \text{relation de Chasles} \\ &= [\ln x]_1^{n+1} && \text{théorème fondamental du calcul intégral} \\ &= \ln(1+n) - \underbrace{\ln 1}_{=0} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout entier  $k \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \ln(1+n)$$

**2.** Pour tout entier  $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$  où  $n$  est un entier fixé dans  $\mathbb{N}^*$ , on a d'après la question 2 de la partie B

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

Donc en additionnant terme à terme ces  $n$  inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

Ainsi pour tout entier  $n \geq 1$ , on a d'après la question précédente

$$u_n \geq \ln(1+n)$$

**3.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $1+n \geq n$ .

Donc par croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0 ; +\infty[$ ,  $\ln(1+n) \geq \ln n$ .


Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$ . Donc par le théorème de comparaison  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1+n) = +\infty$ .

**4.** On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1+n) = +\infty$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n \geq \ln(1+n)$ .

Donc par le théorème de comparaison, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty$$

**Remarques**

- Une somme infinie de termes est appelée une série.
- La série étudiée dans cet exercice est appelée la série harmonique. On a prouvé qu'elle ne convergeait pas.
-  Des termes en nombre infini peuvent avoir une somme finie. Le mathématicien suisse Euler a prouvé au 18<sup>e</sup> siècle la célèbre formule suivante

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Exercice 10** Continuité d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt & \text{si } x > 0 \\ \ln 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1.  $x$  est un réel fixé strictement positif. Pour tout  $t \in [x ; 2x]$

on a  $x \leq t \leq 2x$

donc  $-2x \leq -t \leq -x$

ainsi  $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$  grâce à la croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ .

2. Pour tout  $x > 0$  fixé,

$$\begin{aligned} e^{-2x} &\leq e^{-t} \leq e^{-x} && \text{d'après la question précédente} \\ \frac{e^{-2x}}{t} &\leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{t} && \text{car } t > 0 \\ \int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt &\leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt && \text{par croissance de l'intégrale avec } x < 2x \end{aligned}$$

Or les fonctions  $t \mapsto e^{-2x}$  et  $t \mapsto e^{-x}$  sont **constantes** sur le segment  $[x ; 2x]$ , donc grâce à la linéarité de l'intégrale

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt = e^{-2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = e^{-2x} [\ln t]_x^{2x} = e^{-2x} (\ln(2x) - \ln x) = e^{-2x} \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = e^{-2x} \ln 2$$

et

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt = e^{-x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = e^{-x} [\ln t]_x^{2x} = e^{-x} (\ln(2x) - \ln x) = e^{-x} \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = e^{-x} \ln 2.$$

On conclut que pour tout  $x > 0$

$$e^{-2x} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-x} \ln 2$$

3. On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-2x} \ln 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} \ln 2 = \ln 2$ .

Donc par le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement de la question précédente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln 2.$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$  et la fonction  $f$  est continue en  $0^+$ .

**Exercice 11** Inspiré du Bac Japon 1997

**Partie 1 : le cas  $n = 1$**

1. La fonction  $f_1$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$  donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$$

Pour tout  $x > 0$

$$f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

2.   
 ➤  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = -\infty$  : l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de  $f_1$  au voisinage de  $-\infty$ .   
 ➤  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$  : l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de  $f_1$  au voisinage de  $+\infty$ .

3. Les fonctions  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  sont toutes deux dérivables sur  $]0 ; +\infty[$ . Donc la fonction produit  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et pour tout  $x > 0$ , on a

$$f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} \underset{(x \neq 0)}{=} \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

Comme  $x^3 > 0$  pour  $x > 0$ , le signe de  $f_1'(x)$  est celui de  $1 - 2 \ln x$ .

Or

- $1 - 2 \ln x = 0$ , si et seulement si,  $\ln x = \frac{1}{2}$ , si et seulement si,  $x = e^{\frac{1}{2}}$
- $1 - 2 \ln x > 0$ , si et seulement si,  $\ln x < \frac{1}{2}$ , si et seulement si,  $x < e^{\frac{1}{2}}$
- $1 - 2 \ln x < 0$ , si et seulement si,  $\ln x > \frac{1}{2}$  si et seulement si  $x > e^{\frac{1}{2}}$ .

Par ailleurs

$$f_1\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} \ln e}{e} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

On en déduit donc le tableau de variations qui suit

$x$	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
<b>Signe de <math>f_1'(x)</math></b>	+	0	-
<b>Variations de <math>f_1</math></b>	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

4. L'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_{f_1}$  au point d'abscisse 1 est donnée par

$$y = f_1'(1)(x - 1) + f_1(1) = 1 \times (x - 1) + 0$$

Il en résulte que

$$y = x - 1$$

**Partie 2 : le cas  $n = 2$**

1. La fonction  $f_2$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f_2(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$  donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x^2} = +\infty$$

Pour tout  $x > 0$

$$f_2(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2} = 0$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$  : l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de  $f_2$  au voisinage de  $+\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$  : l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de  $f_2$  au voisinage de  $+\infty$ .

3. La fonction  $f_2$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ . De plus la fonction  $f_2$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec

$$u(x) = (\ln x)^2 = \ln x \times \ln x.$$

$$\text{Ainsi pour tout } x > 0, u'(x) = \frac{1}{x} \times \ln x + \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}.$$

Il s'ensuit que pour tout  $x > 0$

$$f_2'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} \times x^2 - (\ln x)^2 \times 2x}{(x^2)^2} \underset{(x \neq 0)}{=} \frac{2x \ln x - 2x(\ln x)^2}{x^4}$$

Par conséquent

$$\text{pour tout } x > 0 \quad f_2'(x) = \frac{2 \ln x}{x^3} (1 - \ln x)$$

Ainsi le signe de  $f_2'$  sur  $]0 ; +\infty[$  est celui de  $\ln x (1 - \ln x)$ .

Or

$\ln x (1 - \ln x) = 0$  si et seulement si  $(\ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 1)$  si et seulement si  $(x = 1 \text{ ou } x = e)$

$\ln x (1 - \ln x) > 0$  si et seulement si  $x \in ]1 ; e[$

$\ln x (1 - \ln x) < 0$  si et seulement si  $x \in ]0 ; 1[ \cup ]e ; +\infty[$

$$\text{Par ailleurs } f_2(e) = \frac{(\ln e)^2}{(e)^2} = \frac{1}{e^2}.$$

On en déduit donc le tableau de variations qui suit

$x$	0	1	e	$+\infty$
<b>Signe de <math>f_2'(x)</math></b>	-	0	+	0
<b>Variations de <math>f_2</math></b>	$+\infty$	0	$\frac{1}{e^2}$	0

**Partie 3 : position relative de  $\mathcal{C}_{f_1}$  et  $\mathcal{C}_{f_2}$**

1. Pour tout  $x > 0$ , on a

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x (\ln x - 1)}{x^2}$$

On a alors le tableau de signe suivant

$x$	0	1	e	$+\infty$
Signe de $\ln(x)$	-	0	+	+
Signe de $\ln(x) - 1$	+	+	0	-
Signe de $\frac{\ln(x)(\ln(x)-1)}{x^2}$	-	0	+	-

- 2. ➤ Pour tout  $x \in [1 ; e]$ ,  $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$
- Pour tout  $x \in ]0 ; 1] \cup [e ; +\infty[$ ,  $f_2(x) - f_1(x) \leq 0$ .

Il en résulte que

$\mathcal{C}_{f_2}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_{f_1}$  sur  $[1 ; e]$  et en dessous ailleurs.

**Partie 4**

1. La fonction  $F$  est dérivable sur  $[1 ; e]$  et on a pour tout  $x \in [1 ; e]$

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{(x)^2} \underset{(x \neq 0)}{=} \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2}$$

Il vient que

pour tout  $x \in [1 ; e]$   $F'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

2. On a

$$I_1 = \int_1^e f_1(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$I_1 = - \int_1^e F'(x) dx$$

$I_1 = -[F(x)]_1^e$  d'après le théorème fondamental de l'analyse

$$I_1 = F(1) - F(e) = 1 - \frac{2}{e}$$

Par conséquent

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} = \frac{e-2}{e}$$

## Exercice 12 La méthode des trapèzes

1. L'aire du trapèze vaut le produit de sa hauteur par la demi-somme de ses bases.  
Ainsi pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j \leq n$ , on a

$$\mathcal{A}_j = \frac{(x_j - x_{j-1})(f(x_{j-1}) + f(x_j))}{2}$$

Or  $x_j - x_{j-1} = h$ . Par conséquent

$$\mathcal{A}_j = \frac{h}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

2. Pour tout entier  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_j = \sum_{j=1}^n \frac{h}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j)) \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n (f(x_{j-1}) + f(x_j)) \quad \text{car } \frac{h}{2} \text{ ne dépend pas de } j \\ &= \frac{b-a}{2n} \sum_{j=1}^n (f(x_{j-1}) + f(x_j)) \quad \text{car } h = \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{2n} \left[ \underbrace{(f(x_0) + f(x_1))}_{=f(a)} + (f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + (f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) + \underbrace{(f(x_{n-1}) + f(x_n))}_{=f(b)} \right] \\ &= \frac{b-a}{2n} [f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)] \\ &= \frac{b-a}{n} \left[ \frac{f(a)}{2} + \frac{2(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))}{2} + \frac{f(b)}{2} \right] \\ &= \frac{b-a}{n} \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\text{pour tout entier } n \geq 1 \quad S_n = \frac{b-a}{n} \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right]$$

3. (a) Par le théorème fondamental de l'analyse

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

Il en résulte que

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2)$$

(b) La programme attendu

```
from math import *  
  
def f(x):  
    return 1/x  
  
def trapezes (a,b,n):  
    h=(b-a)/n  
    S=(f(a)+f(b))/2  
    for i in range(1,n):  
        S=S+f(a+i*h)  
    S= h*S  
    return S
```

(c) La commande `trapezes(1,2,100)` renvoie

```
>>> trapezes(1,2,100)  
0.6931534304818241
```

(d) Au centième près

$$\ln 2 = 0,69.$$