

Contrôle 1

■ Durée : 55 minutes

■ Les calculatrices ne sont pas autorisées

■ Nom :

■ Prénom :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1 point

- (b) Prouver que pour tout entier naturel n , $u_n > \frac{1}{2}$.

4 points

- (c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} - u_n \right)$.

2 points

(d) En déduire les variations de la suite (u_n) .

1 point

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique en précisant sa raison.

2 points

(b) En déduire une expression du terme général v_n en fonction de l'entier naturel n .

2 points

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \left[11 \times \left(\frac{1}{5} \right)^n + 1 \right]$.

2 points

(d) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$? Justifier.

1 point

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

(a) Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

2 points

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \frac{55}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right] + \frac{n}{2}.$$

2 points

(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \frac{n}{2} \right)$.

1 point